# DS N°6 : Ln

**I** **(9 points)** Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de $f$ et vérifier que pour tout $x \in ]0\ ;\ 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

   **Correction :**

   $\forall x \in ]0\ ;\ 1]\ ,\ f'(x) = \left(1-\ln(x)\right)^2 - 2\left(1-\ln(x)\right) = \left(1-\ln(x)\right)\left(1-\ln(x)-2\right)$

   On a donc bien $\forall x \in ]0\ ;\ 1]\ ,\ f'(x) = \left(\ln(x)+1\right)\left(\ln(x)-1\right)$.

   b) Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. On admet pour le moment que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

   **Correction :**

   Sur $]0\ ;\ 1]\ ,\ \ln(x) < 0$ d'où $\left(\ln(x)-1\right) < 0$

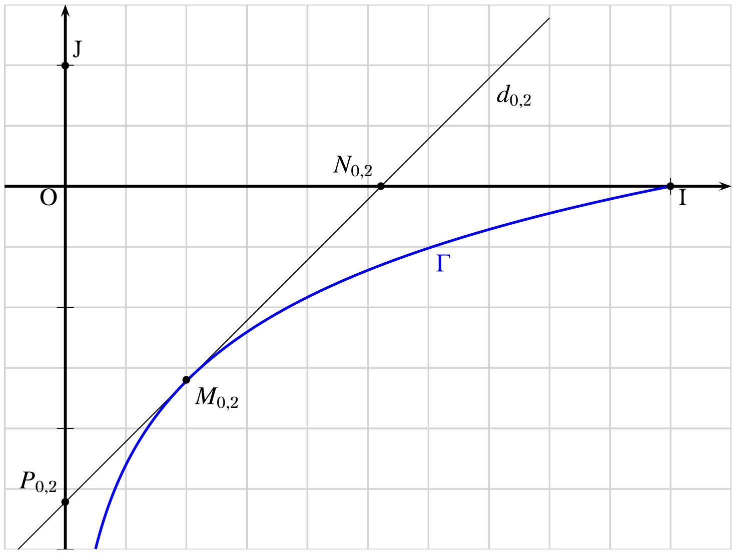
   $f'(x)$ est donc du signe contraire de $\left(\ln(x)+1\right)$

   $\ln(x)+1 > 0 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$, on en déduit le tableau des variations de $f$

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | \|\| $0$ | ↗ | $4\mathrm{e}^{-1}$ | ↘ | $1$ |

On note $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \ln x$. Soit $a$ un réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. On note $M_a$ le point de la courbe $\Gamma$ d'abscisse $a$ et $d_a$ la tangente à la courbe $\Gamma$ au point $M_a$. Cette droite $d_a$ coupe l'axe des abscisses au point $N_a$ et l'axe des ordonnées au point $P_a$ .
On s'intéresse à l'aire du triangle $ON_aP_a$ quand le réel $a$ varie dans l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.




a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

**Correction :**

$\mathrm{O}N_{0,2} \approx 0{,}5$ et $\mathrm{O}P_{0,2} \approx 2{,}6$

On en déduit que l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ $\dfrac{0{,}5 \times 2{,}6}{2} = 0{,}65$ unités d'aire.

b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

**Correction :**

$\forall x \in ]0\ ;\ 1] g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$d_{0,2}$ est de coefficient directeur $g'(0{,}2) = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$. On a donc $d_{0,2}\ :\ y = 5x + b$

Or $d_{0,2}$ passe par $M_{0,2}\left(0{,}2\ ;\ \ln(0{,}2)\right)$, on en déduit $b = \ln(0{,}2) - 1 = -1 - \ln(5)$

Finalement $d_{0,2}\ :\ y = 5x - \ln(5) - 1$

c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ .

**Correction :**

Avec $x = 0$ dans l'équation de $d_{0,2}$, on a $\mathrm{O}P_{0,2}$ :
$\mathrm{O}P_{0,2} = |\ln(0{,}2) - 1| = 1 + \ln(5)$
Avec $y = 0$ dans l'équation de $d_{0,2}$, on obtient alors l'abscisse de $N_{0,2}$ :
$5x + \ln(0{,}2) - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1 + \ln(5)}{5}$ donc $ON_{0,2} = \dfrac{1 + \ln(5)}{5}$
L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est donc $\dfrac{(1 + \ln(5))^2}{10} \approx 0{,}681$ unités d'aire.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel $a$ de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, l'aire du triangle $ON_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de $a$ l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

**Correction :**

On remarque que $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}f(a)$ donc l'aire sera maximale si $f(a)$ est maximale

On en déduit que l'aire est maximale si $a = \mathrm{e}^{-1}$ et on a $\mathcal{A}\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{1}{2}f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \approx$ 0,74 unités d'aire.

**II** **(9 points)** On considère la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Justifiez que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**Correction :**

$P(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{2}$ est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta < 0$. Il garde d0n un signe constant (strictement positif). Donc $f$ est bien définie.

2. Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ et donner sans justification celle en $-\infty$.

**Correction :**

Par théorème du plus haut degré (ou par somme), $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, et d'autre part $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, don par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de $f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Correction :**

En vertu de la dérivée de la fonction composée $\ln(u)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + \dfrac{5}{2}}$$

4. En déduire le tableau des variations de $f$.

**Correction :**

Nous avons déjà vu en première question que $P(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $N(x) = 2x + 1$ qui est affine. On a donc le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $\ln(\frac{9}{4})$ | $\nearrow$ | |

5. La fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

**Correction :**

Le signe de $f''(x)$ est donné par le signe de son numérateur
$Q(x) = -2x^2 - 2x + 4 = (x-1)(-2x-4)$.
$Q$ admet deux racines distinctes, donc $Q$ s'annule deux fois en changeant de signe (en $x = 1$ et $x - 2$). Il y a donc deux points d'inflexion (en $x = 1$ et $x - 2$).

**III** **(2 points)** Il sagit de montrer que pour l'exercice 1, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$

**Correction :**

$4(\sqrt{x}\ln \sqrt{x})^2 = 4x(\frac{1}{2}\ln x)^2 = x(\ln x)^2$

2. En déduire la limite de $x(\ln x)^2$ en 0.

**Correction :**

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ et par croissance comparée : $\lim_{X\to 0} X \ln X = 0$ alors par composée $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln \sqrt{x} = 0$ donc $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$.

3. En déduire la limite de $f$ en 0.

**Correction :**

On a alors $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + x$.
On sait que $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ et de même par croissance comparée : $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$. Donc par somme : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

**IV✳** Généraliser la méthode pour montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$.

**Correction :**

Soit $f(x) = x(\ln x)^n$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{\frac{1}{n}} \ln x)^n \\ &= (x^{\frac{1}{n}} \ln(x^{\frac{1}{n}})^n)^n \\ &= (x^{\frac{1}{n}} n \ln(x^{\frac{1}{n}}))^n \\ &= n^n (x^{\frac{1}{n}} \ln(x^{\frac{1}{n}}))^n \end{aligned}$$

Par composé $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} \ln(x^{\frac{1}{n}}) = 0$ et on a alors le résultat.