$\mathcal{DS}$ $\mathcal{N}$°6 : Ln

I **(9 points)** Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par

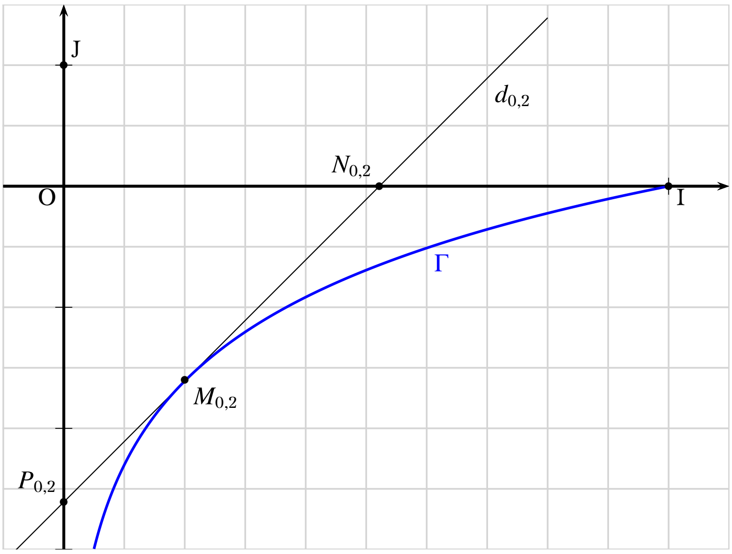
$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

   b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. On admet pour le moment que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \ln x$. Soit a un réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.



   a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

   b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.
   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

II **(9 points)** On considère la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Justifiez que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et donner sans justification celle en $-\infty$.
3. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire le tableau des variations de f.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

III **(2 points)** Il sagit de montrer que pour l'exercice 1, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$
2. En déduire la limite de $x(\ln x)^2$ en 0.
3. En déduire la limite de f en 0.