10

FICHARD
Emilie

DS n°4 : L'espace

06/02/23

On a $A(0;8;6)$ $B(6;4;4)$ $C(2;4;0)$

1. a) on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

donc $x_{\vec{AB}} = 3x_{\vec{AC}}$ et $y_{\vec{AB}} = y_{\vec{AC}}$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

b) on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$:

donc $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 1\times 6 + 2\times(-4) + (-1)\times(-2)$

$= 6 - 8 + 2$

$= 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$

et $\vec{n}\cdot\vec{AC} = 1\times 2 + 2\times(-4) + (-1)\times(-6)$

$= 2 - 8 + 6$

$= 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AC}$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs du plan (ABC), donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

donc $(ABC) : x + 2y - z + d = 0$; $d \in \mathbb{R}$

et $A(0;8;6) \in (ABC)$ donc $x_A + 2y_A - z_A + d = 0$

donc $2\times 8 - 6 + d = 0$

donc $d = -10$

donc $(ABC) : x + 2y - z - 10 = 0$

2. on a $D(0,0,6)$ et $E(6;6;0)$

a) donc $\vec{DE}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (DE)

et $D(0;0,6) \in (DE)$, donc, par propriété :

$$(DE) : \begin{cases} x = 6k \\ y = 6k \\ z = -6k + 6 \end{cases} ; \quad k \in \mathbb{R}$$

b) I est le milieu de $[BC]$, donc $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$

et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4$

et $z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2$

donc $I(4;4;2)$

avec $k = \frac{2}{3}$ dans (DE), on obtient :

$$(DE) \begin{cases} x = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \\ y = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \\ z = -6 \times \frac{2}{3} + 6 = 2 \end{cases}$$

donc $I \in (DE)$.

3. a) on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

donc $AB^2 = 6^2 + (-4)^2 + (-2)^2$ et $AC^2 = 2^2 + (-4)^2 + (-36)^2$

$= 56$ $\quad$ $= 56$

donc $AB = \sqrt{56}$ et $AC = \sqrt{56}$

donc $AB = AC$, donc ABC est isocèle en A.

b) ABC est isocèle, donc la hauteur issue de A est (la médiatrice de $[BC]$), donc le segment $[IA]$.

on a $\vec{BC}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $BC^2 = (-4)^2 + (-4)^2$ donc $BC = \sqrt{32}$

$= 32$

et $\vec{IA}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $IA^2 = (-4)^2 + 4^2 + 4^2$ donc $IA = \sqrt{48}$

$= 48$

donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BC \times IA}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{32} \times \sqrt{48}}{2} = 8\sqrt{6} \approx 19,6$ u.a.

c) $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 6\times 2 + (-4)\times(-4) + (-2)\times(-6)$

$= 12 + 16 + 12$

$= 40$

d) on a $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{AB\times AC}$

$= \dfrac{40}{\sqrt{56}\times\sqrt{56}}$

donc, d'après la calculatrice, $\widehat{BAC} \approx 44,4°$

4. on a $H\left(\frac{5}{3} ; \frac{10}{3} ; -\frac{5}{3}\right)$

donc $\vec{OH}\left(\frac{5}{3} ; \frac{10}{3} ; -\frac{5}{3}\right)$

$\vec{OH}\cdot\vec{AB} = \frac{5}{3}\times 6 + \frac{10}{3}\times(-4) + \left(-\frac{5}{3}\right)\times(-2)$

$= 10 - \frac{40}{3} + \frac{10}{3}$

$= 0$ donc $\vec{OH}\perp\vec{AB}$

$\vec{OH}\cdot\vec{AC} = \frac{5}{3}\times 2 + \frac{10}{3}\times(-4) + \left(-\frac{5}{3}\right)\times(-6)$

$= 0$ donc $\vec{OH}\perp\vec{AC}$

donc $\vec{OH}$ est normal au plan (ABC) ; d'où H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

donc distance (O ; ABC) = OH

$= \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4,1$ u.l.