Correction Du DS 11 - Intégrales

I (6 points)

1. Le nombre dérivé de f en 0 est : 1 : le coefficient directeur de la droite d'équation $y = 1x + 3$ est égal à 1.
2. On voit que l'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 0$ est un peu supérieure à 2.
3. La croissance de F dépend du signe de sa dérivée f ; f est positive sur $[-1\ ;\ 5]$, donc F est croissante sur cet intervalle.
4. On a $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$, or $\mathrm{e}^{f(x)} > 0$ quel que soit le réel x, donc f' et g' ont le même signe donc f et g ont les mêmes variations.
5. Réponse b
6. g est la dérivée (elle est négative puis positive) donc la primitive doir être décroissant puis croissant. C'est b.

II

1. a) Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire de la surface limitée par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

   b) $f_{n+1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} \times \mathrm{e}^{-x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \times \mathrm{e}^{-x} = f_n(x) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$. En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $f_n(x) > 0$, on obtient :
   $f_n(x) \times \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \times 1$, soit finalement :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
   Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des fonctions continues f_{n+1} et f_n :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

2. a) $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1+x \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient : $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
   D'autre part on sait que pour $1 + x \geqslant 1$, on a $(1+x)^2 \geqslant 1 + x \iff$
   $\dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.
   Enfin il est évident que $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} > 0$, donc finalement :
   $$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

   b) Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des inégalités précédentes on obtient
   $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ soit encore
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \left[-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant -\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n} - 1\right)$.
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n} - 1\right) = 0$.
   Conclusion d'après le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

3. a) Posons $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{1+x} & v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$
   Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$; en intégrant par parties on a donc :
   $I_n = \left[-\dfrac{1}{n(1+x)}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$;
   $I_n = \left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2n} + \dfrac{1}{n}\right] - \dfrac{1}{n}J_n$ ou encore
   $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right)$.

b) Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n \neq 0$:

$nI_n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} nI_n = 1$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $I_n \approx \dfrac{1}{n}$.

Exemple : pour $n = 10$, la calculatrice donne $I_{10} \approx 0,091 \approx \dfrac{1}{10}$.