Devoir N°6 - 14 dec 2007. TS7.

(I) ① $e^x - 4 + 3e^{-x} \geqslant 0 \iff e^{2x} - 4e^x + 3 \geqslant 0$. (E).

Soit $P(X) = X^2 - 4X + 3$.

$\Delta = 4$; $X_1 = \frac{4+2}{2} = 3$; $X_2 = 1$ donc $P(X) = (X-3)(X-1)$.

d'où (E) $\iff (e^x - 3)(e^x - 1) \geqslant 0$.

$e^x - 3 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln 3$ car ln strict ↗ sur $\mathbb{R}_+^*$

$e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$

d'où le tableau de signes:

x		0		$\ln 3$	
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$(e^x-3)(e^x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty ; 0] \cup [\ln 3 ; +\infty[$.

② ⓐ $g(x) = x^{1/3} \ln x$.

$= 3x^{1/3} \ln x^{1/3}$

$X = x^{1/3}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x^{1/3} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} X \ln X = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^{1/3} \ln x^{1/3} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{0} g = 0$ (par produit.)

ⓑ $h(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x} = \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3$

$X = 3x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{0} h = 3$ (par produit)

③ $f(x) = \ln(e^{3x} + x^2)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $\varphi(x) = f(x) - 3x \quad \forall x > 0$.

$= \ln(e^{3x} + x^2) - 3x$

$= \ln\left(e^{3x}\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)\right) - 3x = 3x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right) - 3x$

$= \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)$

$\frac{x^2}{e^{3x}} = \frac{(3x)^2}{e^{3x}} \times \frac{1}{9}$.

$X = 3x$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(3x)^2}{e^{3x}} = 0$

donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} = 0$.

par somme on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{x^2}{e^{3x}} = 1$

et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{e^{3x}}\right) = 0$.

d'où $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$ donc $y = 3x$ asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(II) ① $y' - 3y = 0$ (E).

les solutions sont de la forme $f(x) = Ce^{3x}$; $x \in \mathbb{R}$; C constante réelle.

② f solution de (F) $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 3f'(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}\ (f'(x))' - 3(f(x))' = 0$

$\iff f'$ solution de (E).

donc $f'(x) = Ce^{3x}$ $x \in \mathbb{R}$.

f est donc une primitive de $Ce^{3x} = \dfrac{C}{3} 3e^{3x}$

donc $f(x) = \dfrac{C}{3} e^{3x} + K$; $K \in \mathbb{R}$; $C \in \mathbb{R}$.

(III) ① ⓐ $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ donc u dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les règles de dérivation.

d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) - u'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = + \dfrac{e^x}{x^2}$

donc u solution de (E).

ⓑ $v - u$ solution de $y - y' = 0$

$\iff v - u - (v-u)' = 0$

$\iff v - v' = u - u'$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}\ v(x) - v'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ car u solution de (E).

$\iff v$ solution de (E).

ⓒ Les solutions de $y - y' = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = Ce^x$; $C \in \mathbb{R}$

d'après ⓑ v solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ solution de $y-y'=0$.

d'où $v(x)-u(x) = Ce^x \quad \forall x>0$.

$\Leftrightarrow \quad v(x) = Ce^x + u(x)$

$= Ce^x + \frac{e^x}{x} \quad \forall x>0. \quad C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions v de la forme $v(x) = Ce^x + \frac{e^x}{x}$, $x>0$ et $C\in\mathbb{R}$.

② $f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x$

ⓐ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} kx+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx+1}{x} = +\infty$ (par quotient)

$\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ d'où par produit, $\underline{\lim\limits_{0} f_k = +\infty}$

<u>si $k<0$</u>

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{kx+1}{x} = k \text{ avec } k<0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \underline{\lim\limits_{x\to +\infty} f_k = -\infty}$.

<u>si $k=0$</u> : $\frac{kx+1}{x} = \frac{1}{x}$ donc $f_k(x) = \frac{e^x}{x}$ et par th $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} f_k(x) = +\infty}$

ⓑ Pour calculer f_k' on peut remarquer que f_k solution de (E) car.

$\forall x>0$; $f_k(x) = \left(k+\frac{1}{x}\right)e^x$

d'où $f_k(x) - f_k'(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x>0$ et donc $f_k'(x) = f_k(x) - \frac{e^x}{x^2} \quad \forall x>0$

$= \frac{kx+1}{x}e^x - \frac{e^x}{x^2}$

$= \frac{e^x}{x^2}\left(kx^2+x-1\right)$.

on déduit $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2+x-1 = 0$

$\Delta = 1+4k$

et $\Delta>0 \Leftrightarrow 1+4k>0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{4}$

donc si $0>k>-\frac{1}{4}$; $f_k'(x)=0$ admet deux solutions.

si $k=-\frac{1}{4}$ $\quad f_k'(x)=0$ admet une solution double

si $k<-\frac{1}{4}$ $\quad f_k'(x)=0$ n'admet pas de solution.

si $k=0$, kx^2+x-1 n'est plus de degré 2 et donc $f_k'(x)=0$ admet une seule solution.

remarque $f_k(x)=0 \iff \frac{kx+1}{x}e^x=0 \iff kx+1=0$

$\iff \begin{cases} x=-\frac{1}{k} & \text{si } k<0 \\ \text{pas de solut}^{\circ} & \text{si } k=0 \end{cases}$

(1) ne coupe pas l'axe des abscisses $\Rightarrow$ (1) représente C_{f_0}.

$C_{f_{-1}}$ doit couper l'axe .... en $x=+1$ ce qui correspond à (3)

$C_{f_{-0,25}}$ ——— $x=-\frac{1}{-0,25}=4$ ——— (4).

donc $C_{-0,15}$ correspond à (2)

Exercice 4 :

1. Remarquons que si $g=\ln(f)$ avec f dérivable et strictement positive alors $g'=\frac{f'}{f}$.

D'où f solution de (E),

$\iff \forall t \in [0;+\infty[$ on a $f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)[3-\ln(f(t))]$

$\iff \frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{1}{20}[3-\ln(f(t))]$ (en divisant par $f(t)>0$),

$\iff g'=-\frac{1}{20}(3-g)$.

$\iff g$ solution de (H).

2. (H) est une équation différentielle de la forme $y'=ax+b$, donc les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $t\mapsto Ke^{\frac{t}{20}}+3$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $K\in\mathbb{R}$ une constante.

3. D'après la question 1, $t\mapsto \ln f$ avec $t>0$ solution de (H) donc il esxiste une constante K telle que

$$\ln f(t)=Ke^{\frac{t}{20}}+3$$

d'où en prenant l'exponentielle on a pour $t>0$

$$f(t)=\exp(Ke^{\frac{t}{20}}+3); t>0$$

4. (a) $f(t)=\exp[3-3\exp(\frac{t}{20})]$

$$\left.\begin{array}{l} X=\frac{t}{20} \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{20}=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty \end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}e^{\frac{t}{20}}=+\infty$$

Donc par somme et produit $\lim\limits_{t\to-\infty}3-3e^{\frac{t}{20}}=-\infty$ d'où

$$\left.\begin{array}{l} X=3-3e^{\frac{t}{20}} \\ \lim\limits_{t\to+\infty}3-3e^{\frac{t}{20}}=-\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}f(t)=0$$

(b) Comme f solution de l'équation différentielle de départ, on a

$$\begin{aligned} f'(t)&=-\frac{1}{20}f(t)[3-\ln(f(t))] \\ &=-\frac{1}{20}f(t)\times 3e^{\frac{t}{20}}<0 \end{aligned}$$

On en déduit f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$f(t)<0,002 \iff \exp[3-3\exp(\frac{t}{20})]<0,002$

$\iff 3-3\exp(\frac{t}{20})<\ln 0,002$ car ln strictment

$\iff \exp(\frac{t}{20})>1-\frac{\ln 0,002}{3}$

$\iff \frac{t}{20}>\ln(1-\frac{\ln 0,002}{3})$ car ln stricetment

$\iff t>20\ln(1-\frac{\ln 0,002}{3})\simeq 16,69$

La taille de l'échantillon est inférieure à 20 individus lorsque $1000f(t)<20$ c'est donc au bout de 17 ans que cela se produit.