

Bac Blanc 6 février 2008

I (Commun à tous les candidats) $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$ $x \geq 0$.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par réciproque, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

d'où par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - e^{-x} = 2$.

d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$

b) Soit $h(x) = f(x) - (2x-2)$ pour $x \geq 0$
 $= -e^{-x}(x-1) = e^{-x} - xe^{-x}$

$X = -x$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$
 $X \rightarrow -\infty$

} par ce-pas-à
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$

de plus d'après a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 0$

On déduit que $\Delta: y = 2x-2$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

c) Etudions le signe de h : $\forall x \geq 0, h(x) = e^{-x}(1-x)$

et $\forall x \geq 0, e^{-x} > 0$ d'où h a le signe de $1-x$:

x	0	1
$h(x)$	$+$	$-$

On déduit que pour $x \in [0, 1]$ C est au-dessus de Δ
 et pour $x \geq 1$ C est en dessous de Δ .

② a) f dérivable pour $x \geq 0$ d'après les règles de dérivabilité.

$\forall x \geq 0, f'(x) = 2 - e^{-x} + (x-1)(+e^{-x})$
 $= xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

b) $\forall x > 0; -x < 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} < 1$ car exp strictement croissante sur \mathbb{R}

$\Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0$

d'autre part, $xe^{-x} > 0$ d'où par somme $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

c) $f'(0) = 0$ donc à l'origine C présente une demi-tangente horizontale.

Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	-1	$+\infty$

③ f continue sur \mathbb{R}_+^* car dérivable
 f strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
 $f(0) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$
 $3 \in [-1; +\infty[$

} Thm bijectif
 \Rightarrow il existe $\alpha > 0$
 unique solut de $f(x) = 3$

on a $f(2,56) \approx 2,9994 < 3$
 $f(2,57) \approx 3,0198 > 3$ $\Rightarrow \alpha \in]2,56; 2,57[$

④ Soit $A(a, f(a))$; $a > 0$; τ_a la tangente en A à C .

$\Delta // \tau_a \Leftrightarrow \tau_a$ et Δ ont même coefficient directeur

$$\Leftrightarrow f'(a) = 2$$

$$\Leftrightarrow ae^{-a} - 2e^{-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-a}(a-2) = 0 \Leftrightarrow a=2 \text{ car } e^{-a} > 0 \forall a \in \mathbb{R}.$$

Donc au point $A(2, 2 - e^{-2})$ la tangente à C est parallèle à Δ .

② Pour les non-spécialistes

① $y' + y = e^{-x}$. (E).

$\forall x \in \mathbb{R}$
 $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

\Rightarrow u est solution particulière de (E).

② $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ et par théorème, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ et C constante réelle.

③ $v - u$ solution de (E₀) $\Leftrightarrow (v-u)' + v-u = 0$

$$\Leftrightarrow v' + v = u' + u$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$$

$$\Leftrightarrow v'(x) + v(x) = e^{-x} \text{ car } u \text{ solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{v \text{ solution de (E)}}$$

④ v solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E₀)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v(x) - u(x) = Ce^{-x} \text{ avec } C \text{ constante}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions v de la forme $v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

⑤ $v(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2$ d'où $f_2(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ Constante

$$\Leftrightarrow \underline{f_2(x) = e^{-x}(2+x)}$$

③ Pour les non-spécialistes

① Soit $f_a(x)$ définie pour $x > 0$ par $f_a(x) = \ln(ax)$.

$x \mapsto ax$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* } par ce posée
 $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* } $\Rightarrow f_a$ dérivable sur \mathbb{R}_+^*

et $\forall x > 0$ $f_a'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

f_a est donc une primitive de $\frac{1}{x} \Rightarrow f_a$ et \ln diffèrent d'une constante:

il existe k tel $\forall x > 0$; $f_a(x) = \ln x + k$

et $f_a(1) = \ln a$ d'où $f_a(x) = \ln x + \ln a$ $\forall x > 0$.

② d'après ce qui précède $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$
 $\Leftrightarrow \ln 1 = \ln b + \ln \frac{1}{b} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{b} = -\ln b.$

et donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \underline{\ln a - \ln b}.$

③ $\ln\left(\frac{3}{8}\right) = \ln 3 - \ln 8$
 $= \ln 3 - 3 \ln 2.$

on a $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$ et $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$
 $\Leftrightarrow 3 \times 0,69 \leq 3 \ln 2 \leq 3 \times 0,70$
 $\Leftrightarrow -3 \times 0,70 \leq -3 \ln 2 \leq -3 \times 0,69$

donc par somme $1,09 - 3 \times 0,7 \leq \ln \frac{3}{8} \leq 1,1 - 3 \times 0,69$
d'où $\underline{-1,01 \leq \ln \frac{3}{8} \leq -0,97}.$

IV (Commun à tous les candidats)

$f(x) = \frac{x}{\ln x}; x > 1$

① a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln x = 0^+$ d'où par quotient et règle des signes : $\underline{\lim_{x \rightarrow 1} f = +\infty}$

par thm des croissances comparées $\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty}.$

b) f dérivable sur $]1; +\infty[$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x > 1, f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \underline{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}}$

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$
 $\Leftrightarrow x > e$ car exp strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

d'autre part $\forall x > 1, (\ln x)^2 > 0$ d'où le signe de f' est celui de $\ln x - 1$,

il est donc donné par le tableau

x	1	e
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$

On a donc \underline{f} strictement croissante sur $[e; +\infty[$ et \underline{f} strictement décroissante

② a) On conjecture que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers l ^{sur $]1; e]$} $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(e) = l.$

b) Montrons par récurrence sur n , que la propriété $P_n: u_n \in [e; 5]$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}.$

Étape 1: $u_0 = 5$; d'où $e \leq u_0 \leq 5 \Rightarrow P_0$ est vraie.

Étape 2: Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Leftrightarrow e \leq u_q \leq 5$
 $\Leftrightarrow f(e) \leq f(u_q) \leq f(5)$ car f strictement croissante sur $[e; +\infty[$
 $\Leftrightarrow e \leq u_{q+1} = \frac{5}{\ln 5} \leq 5$ donc $\underline{P_{q+1}}$ est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}; e \leq u_n \leq 5.$

$$\textcircled{c} \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \\ = \frac{u_n}{h u_n} - u_n = \frac{u_n}{h u_n} (1 - h u_n)$$

or $\forall n, u_n \geq e$ d'après \textcircled{b} d'où $h(u_n) \geq 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } 1 - h u_n < 0 \\ u_n > 0 \\ h u_n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0. \quad \text{donc } (u_n) \text{ strictement décroissante.}$$

\textcircled{d} (u_n) est minorée par e et décroissante donc (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ de plus d'après \textcircled{b} $l \in [e; 5]$

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \text{ converge vers } l \\ f \text{ est continue sur } [e; 5] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d'après le thm du point fixe } l = f(l)$$

$$\textcircled{e} f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l}{h l} = l \Leftrightarrow \frac{l}{h l} (1 - h l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = e$$

$l = 0$ est à exclure car $l \in [e; 5]$ d'où $l = e$.

\textcircled{V} Commun à tous les candidats.

$\textcircled{1a}$ Écriture complexe de t_w : $z' = z^{-1} + \frac{5}{2}i$

$$t_w(B) = Q \quad \text{d'où } z_Q = z_B^{-1} + \frac{5}{2}i \Rightarrow \boxed{z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}$$

\textcircled{b} Écriture complexe de $t_{(C, -\frac{1}{3})}$: $z' = z_C - \frac{1}{3}(z - z_C)$

$$\text{d'où } z_R = -3 - \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}(3 + 2i + 3 + \frac{1}{3}i)$$

$$\boxed{z_R = -5 - i}$$

\textcircled{c} Écriture complexe de $t_{(A, \frac{\pi}{2})}$: $z' - z_A = e^{-i\pi/2}(z - z_A)$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{3}{2} + 6i - i(z - \frac{3}{2} - 6i)$$

$$z(P) = S \Rightarrow z_S = \frac{3}{2} + 6i - i(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i)$$

$$\boxed{z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i}$$

$$\textcircled{2a} \overrightarrow{z_{SP}} = z_P - z_S = 3 + 2i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{5i}{2}$$

$$\overrightarrow{z_{RQ}} = z_Q - z_R = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i + 5 + i = \frac{11}{2} - \frac{5i}{2}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$
 $\Rightarrow PQPS$ parallélogramme

$$\textcircled{b} \frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{+\frac{5}{2}i - \frac{11}{2}}{3 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \frac{5i - 11}{5 + 11i} = \frac{i(5 + 11i)}{5 + 11i} = \underline{i = e^{i\pi/2}}$$

d'où $z_R - z_Q = i(z_P - z_Q)$ donc dans la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$

P a pour image R d'où $PQ = PR$ et PQR rectangle en P .

d'où $PQRS$ est un carré

② PQRS cerné donc PQRS est inscrit dans le cercle de centre Ω centre du cerné et rayon ρ longueur de la demi-diagonale

$$z_{\Omega} = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{1}{2}(3+2i-5-i) = -1 + \frac{i}{2}$$

$$\text{et } \rho = \frac{PR}{2} = \frac{|z_P - z_R|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{73}}{2} \quad \text{d'où } P, Q, R, S \in C(\Omega, \frac{\sqrt{73}}{2})$$

avec $\Omega(-1 + \frac{i}{2})$.

③ $P \in C$; $[\Omega P]$ est donc un rayon de C

$$\text{d'où } (AP) \text{ tangente à } C \Leftrightarrow (AP) \perp (\Omega P)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{\Omega P}, \vec{AP}) = \frac{\pi}{2} \text{ (mod } \pi).$$

$$\text{Calculons } \frac{z_P - z_A}{z_P - z_{\Omega}} = \frac{3+2i - \frac{3}{2} - 6i}{3+2i + 1 - \frac{i}{2}} = \frac{3-8i}{8+3i} = \frac{i(-3i-8)}{8+3i} = -i$$

$$\text{D'où par l'hm } (\vec{\Omega P}, \vec{AP}) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \text{ (mod } 2\pi) \text{ donc } (AP) \perp (\Omega P)$$

\rightarrow (AP) tangente à C.

Méthode plus rapide: le produit scalaire: $z_{\vec{AP}} = \frac{3}{2} - 4i$; $z_{\vec{\Omega P}} = 4 + \frac{5}{2}i$

$$\text{d'où } \vec{AP} \cdot \vec{\Omega P} = \frac{3}{2} \times 4 + (-4) \times \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (AP) \perp (\Omega P).$$

② Exercice de spécialité:

① $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$

② on déduit que $\forall x \in \mathbb{R}; x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$

$$= \frac{(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)}{1} \text{ qui est un produit de deux trinômes.}$$

② ① $m \geq 2$

$$\text{d'après ce qui précède, } m^4 + 4 = (m^2 - 2m + 2)(m^2 + 2m + 2)$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} m^2 - 2m + 2 = m^2 - 2m + 1 + 1 = (m-1)^2 + 1 \geq 2 \text{ car } m \geq 2 \\ m^2 + 2m + 2 \geq 8 \text{ car } m \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{m^4 + 4 \text{ composé}}$$

donc $m^4 + 4$ n'est pas premier.

② soit d diviseur de A tq $d|m$.

$$\text{d'où } \left. \begin{array}{l} d | m^2 - 2m + 2 \\ d | m \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{d | 2} \text{ par combinaison linéaire à coeff entiers.}$$

③ soit d diviseur de A et B alors par combinaison linéaire à coeff entiers

$$d | A - B \Leftrightarrow d | -4m \Leftrightarrow \underline{d | 4m}$$

④ n impair

① n impair \rightarrow il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 2k + 1$

$$A = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 \text{ donc } A \text{ impair.}$$

$$B = m^2 + 2m + 2 = (n+1)^2 + 1 = [2(k+1)]^2 + 1 \text{ donc } B \text{ impair.}$$

$d = A \cap B$ donc d impair (sinon d pair et alors $B = kd \Rightarrow B$ pair !)

② $\left. \begin{array}{l} d|A \\ d|B \end{array} \right\} \Rightarrow d|4m$ d'après ③. et $\left. \begin{array}{l} d|4m \\ 4nd=1 \\ \text{car d impair} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} \underline{d|m}$

③ d'après ② : $\left. \begin{array}{l} d|A \\ d|m \end{array} \right\} \Rightarrow d|2$; de plus d impair $\Rightarrow d=1$
 $\Rightarrow \underline{PGCD(A,B) = 1}$

⑤ a) Supposons n pair. D'où $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

d'où $m^2 - 2m + 2 = 4k^2 - 4k + 2 \equiv 2 \pmod{4}$ d'où 4 ne divise pas $m^2 - 2m + 2$

b) n pair $\Rightarrow A$ pair et B pair

$\Rightarrow d = A \cap B$ est également pair d'où $d = 2p ; p \in \mathbb{N}$.

si p est pair alors $p = 2k$ d'où $d = 4k$ et donc $4k|A \Rightarrow 4|A$ absurde d'après ⑤a)
donc p est impair. Enfinement $d = 2p$ avec p impair

③ D'après ③ : $\left. \begin{array}{l} 2p|A \\ 2p|B \end{array} \right\} \Rightarrow 2p|4m$ c'est à dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tq

$$2pk = 4m \Leftrightarrow pk = 2m \text{ d'où } p|2m \text{ ou } p \text{ impair} \Rightarrow p \wedge 2 = 1$$

et d'après le théorème de Gauss on a donc $p|m$

On a alors $\left. \begin{array}{l} p|m \\ p|A \text{ (ou } 2p|A) \end{array} \right\} \Rightarrow p|2$ d'après ②

et p impair $\Rightarrow p=1$

donc $d = 2p = 2$