Devoir n° 9 TS7 - 29 février 2008

I $u_n \neq 0 \ \forall n$ et $v_n = -\frac{2}{u_n}$. $n \in \mathbb{N}$.

① (u_n) cvg $\Rightarrow$ (v_n) cvg est Faux

En effet si (u_n) converge vers 0, par exemple $u_n = \frac{1}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

alors (v_n) diverge car $v_n = n+1$; $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ① est fausse.

② $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ car $x \to \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow -\frac{2}{u_n} \geqslant -1$ $(\times(-2)$ avec $-2<0)$

donc (v_n) minorée par -1 $\Rightarrow$ ② Vraie

③ $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n = -2\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$

$$= -2\frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}} = \frac{2(u_{n+1} - u_n)}{u_n u_{n+1}}$$

Avec $u_n = \frac{1}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$ on a (u_n) décroissante donc $\frac{2(u_{n+1} - u_n)}{u_n u_{n+1}} \leqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

et donc v_n décroissante donc ③ est fausse.

④ avec $u_n = (-1)^n$; (u_n) est clairement divergente et $v_n = \frac{-2}{(-1)^n} = -2(-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

donc (v_n) divergente. $\Rightarrow$ ④ est fausse.

II $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

① $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}$; $v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{15}{4}$

$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}$; $v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}$.

② ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= (u_{n+1} + v_n - u_n - v_n)\frac{1}{2}$$
$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4}$$
$$= \frac{1}{4} w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1er terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

ⓑ On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_n = w_0 . q^n$ d'où $w_n = \frac{1}{4^n}$.

$\left|\frac{1}{4}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$

or $w_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ car (w_n) géométrique de raison $\frac{1}{4} > 0$ et $w_0 > 0$.

d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow (u_n) \nearrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} \leq 0$ d'où $(v_n) \searrow$

On a (v_n) décroissante ; (u_n) croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

d'où (vn) et (un) adjacentes. Donc (v_n) et (u_n) convergent vers une limite commune ℓ.

④ $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$; $t_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{2}$

$$= \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n + u_n + v_n\right) = \frac{1}{4}\left(2u_n + 4v_n\right)$$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{2} = t_n.$$

donc (t_n) est constante.

ⓑ (t_n) constante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{2} = \frac{11}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{u_n + 2v_n}{2} = \frac{11}{2}$

et sachant que (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ on déduit par passage à la limite

$\frac{3\ell}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \ell = \frac{11}{3}$;

(u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{11}{3}$.

(III) $u_n = \int_1^n e^{-x^2}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

① $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} e^{-x^2}dx - \int_1^{n} e^{-x^2}dx$

$= \int_n^{n+1} e^{-x^2}dx$ par linéarité de l'intégrale

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x^2} > 0$; la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

les bornes sont dans l'ordre $(n < n+1)$

donc d'après le thm de positivité $\int_n^{n+1} e^{-x^2}dx > 0$

on déduit donc que (u_n) est croissante.

② $\forall x \geqslant 1$ on a par produit par x $(x \geqslant 0)$.

$x^2 \geqslant x$

$\Leftrightarrow -x^2 \leqslant -x$ $(\times(-1)$ avec $-1<0)$.

$\Leftrightarrow e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ car exp croissante sur $\mathbb{R}$.

③ Les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. les bornes 1 et n sont dans l'ordre $(1 < n)$.

donc par intégration de l'inégalité on a $\int_1^n e^{-x^2}dx \leqslant \int_1^n e^{-x}dx$

et $\int_1^n e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_1^n = e^{-1} - e^{-n}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \leqslant \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n}$.

On déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{e}$ donc (u_n) est croissante et majorée

$\Rightarrow$ (u_n) converge.

(IV) $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

① pour $n=1$ on a $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt$.

soit $u(t) = 1-t$ et $v(t) = e^t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

u, v dérivables et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = -1$; $v'(t) = e^t$

donc u, v, u', v' continues et par intégrat° par parties on a

$u_1 = \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt = -1 + \left[e^t\right]_0^1 = e - 2$ donc $u_1 = e-2$

② $\forall t \in [0;1]$; $1-t \geq 0$

$\Rightarrow (1-t)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

et par produit $(1-t)^n e^t \geq 0$ car $e^t \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto (1-t)^n e^t$ continue sur $\mathbb{R}$; les bornes 0, 1 sont dans l'ordre $(0 \leq 1)$.

donc par intégration de l'inégalité on a $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$.

d'où $u_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$.

③ Soit $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$

alors u, v dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = (n+1)(1-t)^n \cdot (-1)$; $v'(t) = e^t$

donc u, v, u', v' sont continues et par intégration par parties on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1} e^t\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-t)^n e^t dt$

$= -1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ par linéarité de l'intégrale

d'où $u_{n+1} = (n+1) u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

④ ⓐ $\forall t < 1$ on a par passage à l'exponentielle (exp croissante sur $\mathbb{R}$).

d'où $e^t \leq e$

$\Rightarrow (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$ $\quad$ ($\times (1-t)^n$ avec $(1-t)^n \geq 0$ d'après ②)

ⓑ les fonctions $t \mapsto (1-t)^n e^t$ et $t \mapsto e(1-t)^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$

les bornes 0, 1 sont dans l'ordre.

donc par intégration de l'inégalité on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e \, dt$. $\quad (*)$

et $\int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc $(*)$ devient $u_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ⓒ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'où d'après le thm des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$