Bac centre étranger - juin 2009.

(I) ① ⓐ A et $\bar{A}$ partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales. $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

ⓑ $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(B \cap A)$ d'après ⓐ

$= P(B) - P(B)P(A)$ car A et B indépendants

$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$

d'où $\bar{A}$ et B indépendants.

② ⓐ Le réveil sonne et le scooter tombe en panne est l'évènement $\bar{R} \cap S$

R, S indépendants donc d'après ① $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R})P(S) = 0,9 \times 0,05$
$= 0,045$

ⓑ Stephane est à l'heure est l'évènement $\bar{R} \cap \bar{S}$

d'où $P(\bar{R} \cap \bar{S}) = P(\bar{R})P(\bar{S})$ car R, S indépendants $\overset{①}{\Rightarrow} R, \bar{S}$ indépendants $\Rightarrow \bar{R}, \bar{S}$

$= 0,9 \times 0,95 = 0,855$

ⓒ Soit A l'évenement Stephane entend son reveil au moins 4 fois

on a alors $\bar{A}$ qui est l'évenement "Stephane n'entend pas son reveil 1 fois ou Stephane entend toujours son réveil"

B: "Stephane entend tjrs son reveil" $P(B) = (0,9)^5$

C: "Stephane n'entend pas son reveil une fois" : $P(C) = (0,9)^4 \times (0,1) \times 5$

d'où $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (0,9)^5 - (0,9)^4 \cdot (0,1) \times 5 \simeq 0,9185$

Autre méthode

- On reconnait une expérience de Bernoulli d'issue succès : "Stephane entend le réveil" et de probabilité $p = 0,9$
- On répète 5 fois cette expérience de manière indépendante (5 jours dans la semaine)

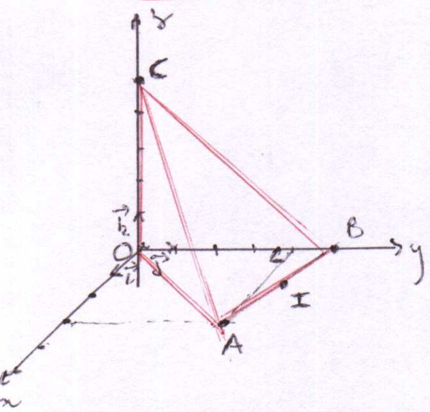
La loi de probabilité comptant le nombre X de succès est donc une loi binomiale de paramètre $5 ; 0,9$.

On a alors $P(X \geqslant 4) = P(X = 5) + P(X = 4)$

$= (0,9)^5 + \binom{5}{4}(0,9)^4 \cdot (1 - 0,9) = (0,9)^5 + 5(0,9)^4 \times 0,1$

$\simeq 0,9185$

II ① ⓐ



② $C \in (Oz)$; $A, B \in (xOy)$

$(Oz) \perp (xOy) \Rightarrow (OC) \perp (OA)$ et $(OC) \perp (OB)$

donc OAC et OBC sont rectangles en O.

$OA = \sqrt{9+16} = 5$; $OB = 5$; $OC = 5$

d'où OAC et OBC rectangles isocèles en O.

Le 3ème coté vaut alors $AC = BC = 5\sqrt{2}$ (Pythagore)

donc ACB isocèle en C.

③ ⓐ $\vec{CH}\begin{pmatrix} 15/19 \\ 45/19 \\ -50/19 \end{pmatrix}$; I milieu de $[AB] \Rightarrow I\left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{2} ; 0\right)$

donc $\vec{CI}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/2 \\ -5 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{CH} = \frac{2\times 5}{19}\vec{CI}$

$\Rightarrow$ H, C, I alignés

ⓑ $\left.\begin{array}{l} I \in (AB) \subset (ABC) \\ C \in (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow H \in (CI) \subset (ABC)$.

$(19\vec{OH})\begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$; $\vec{CA}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc $19.\vec{OH}.\vec{CA} = 15\times 3 + 45\times 4 - 5\times 45 = 0$.

et $19\vec{OH}.\vec{CB} = 0$.

d'où $(OH) \perp (AC)$ et $(OH) \perp (CB) \Rightarrow (OH) \perp (ABC)$

de plus $H \in (ABC)$ donc H projeté orthogonal de H sur (ABC).

ⓒ $\vec{n} = 19\vec{OH}$ est donc un vecteur normal de (ABC) d'où

$(ABC) : 15x + 45y + 45z + d = 0$ de plus $C(0,0,5) \in (ABC)$

d'où $225 + d = 0 \Rightarrow d = -225$ donc $(ABC) : 15x + 45y + 45z - 225 = 0$.

④ ⓐ $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{3} OB \times h$ où h hauteur de OAB issue de A ; $h = 3$

d'où $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2}\times 5\times 3 = \frac{15}{2}$ u.a. $\Rightarrow V(OABC) = \frac{\mathcal{A}(OAB)\times OC}{3} = \frac{15\times 5}{2\times 3} = \frac{25}{2}$ u.v

ⓑ Par théorème $d(O ; (ABC)) = \frac{|-225|}{\sqrt{15^2+45^2+45^2}} = \frac{15\sqrt{19}}{19}$

ⓒ Autre calcul pour le volume de OABC : $V(OABC) = \frac{\mathcal{A}(ABC)\times OH}{3}$ car [OH] est la hauteur issue de O.

d'où $\mathcal{A}(ABC) = \frac{3V(OABC)}{OH} = \frac{3\times 25}{2}\times\frac{19}{15\sqrt{19}} = \frac{5}{2}\sqrt{19}$

II Spécialité. ① ⓐ il est clair que $(9;1)$ solution car $3\times 9+2\times 1=29$ (*)

ⓑ par différence de (*) avec (E) on obtient $3(x-9)+2(y-1)=0$.

d'où $3(x-9)=-2(y-1)$ (E')

or 3 et -2 sont premiers entre eux donc $3 \mid y-1$

donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y=1+3k$

En reportant alors dans (E') on a $3(x-9)=-2\times 3k$ d'où $x=-2k+9$

Vérifions ces solutions : $3(x)+2(y)=3(-2k+9)+2(1+3k)$
$=-6k+27+2+6k=29$

donc finalement $S=\{(-2k+9;1+3k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$

ⓒ Si l'on impose la condition $x\geqslant 0\,;\,y\geqslant 0$ il vient $\begin{cases}-2k+9\geqslant 0\\ 1+3k\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2k\leq 9\\ 3k\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\leq 4\\ k\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow k\in\{0,1,2,3,4\}$

Les couples de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont donc $\{(9,1);(7,4);(5,7);(3;10);(1,13)\}=\mathcal{M}$

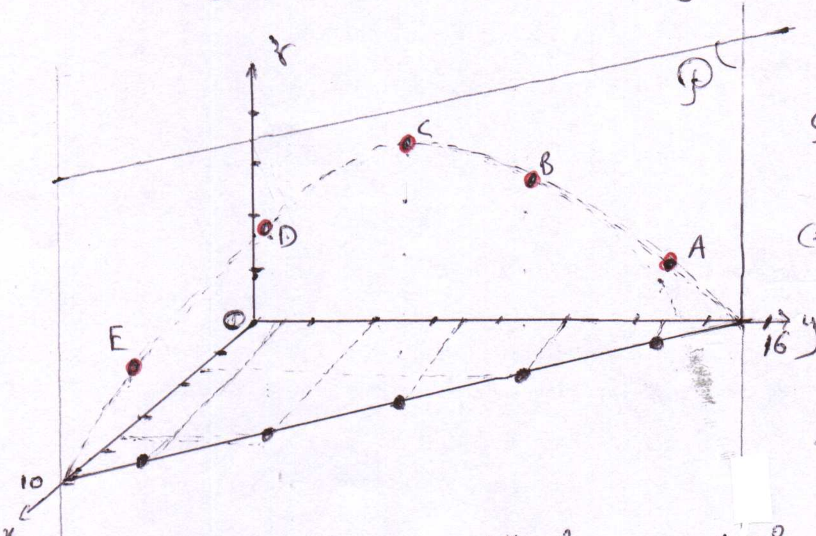
② ⓐ $\mathcal{P}: 3x+2y=29$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $(\mathcal{Z})$; $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u} \Longrightarrow (\mathcal{Z})$ et $\mathcal{P}$ parallèles.

ⓑ $M(x,y,z)\in(Ox) \Leftrightarrow y=0\,;\,z=0$ donc $\mathcal{P}\cap(Ox)$ est le point tel que $3x=29 \Leftrightarrow x=\frac{29}{3}$

$M(x,y,z)\in(Oy) \Leftrightarrow x=0, z=0$ donc $\mathcal{P}\cap(Oy)$ est le pt tel que $2y=29 \Leftrightarrow y=\frac{29}{2}$



③ ⓐ $(xOy): z=0$
$\mathcal{S}: 4z=xy$

$S_1=\mathcal{S}\cap(xOy)$: $\begin{cases}z=0\\ 4z=xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ xy=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\ x=0 \text{ ou } y=0\end{cases}$ il s'agit de la figure 3.

ⓑ $\mathcal{S}\cap\mathcal{R}$: $\begin{cases}z=1\\ 4z=xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=1\\ xy=4\end{cases}$

il s'agit d'une hyperbole figure n° 1

ⓒ Soit $Q: y=8$ alors $S_3=\mathcal{S}\cap Q$: $\begin{cases}y=8\\ 4z=xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=8\\ z=2x\end{cases}$ c'est une droite dans le plan $y=8$ d'où c'est la figure n° 4

ⓓ $S_4=\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$, $\begin{cases}3x+2y=29\\ 4z=xy\end{cases}$ on veut de plus $(x;y)\in\mathcal{M}$

on obtient donc pour $(x,y)=(9,1)$; $z=\frac{9}{4}$; $(x,y)=(7,4)$; $z=7$; $(x,y)=(5,7)$; $z=\frac{35}{4}$

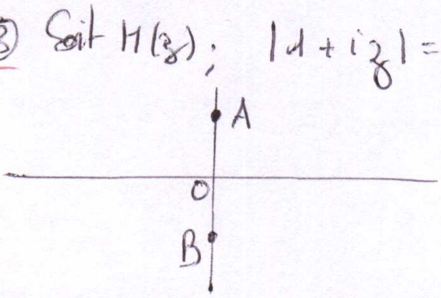
pour $(x,y)=(3;10)$; $z=\frac{15}{2}$ et $(x,y)=(1;13)$ $z=\frac{13}{4}$. Les points cherchés sont $A(9,1,9/4)$; $B(7,4,7)$
$C(5,7,\frac{35}{4})$, $D(3,10,15/2)$; $E(1,13,9/4)$

III ① $\mathrm{Re}(i^2) = \mathrm{Re}(-1) = -1$; $(\mathrm{Re}(i))^2 = 0^2 = 0$ donc ① est fausse.

② $OM = |z|$; $ON = |\bar{z}| = |z|$; $OP = \left|\dfrac{z^2}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z|$

d'où M, N, P sont sur un même cercle de centre O. ② est vraie

③ Soit $M(z)$; $|1+iz| = |1-iz| \iff |i+z| = |i+z|$ (on multiplie par $|i| = 1$)



$\iff MA = MB$ où $A(i)$; $B(-i)$

$\iff$ M point de la médiatrice de [AB]

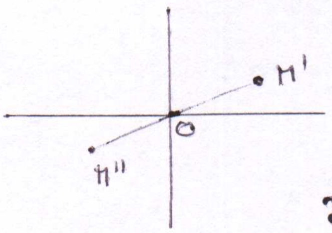
$\iff M \in (Ox) \iff \mathrm{Im}(z) = 0$

③ est vraie

④ $M(z)$; $M'(z')$ et notons $M''(-z')$

$|z+z'| = |z-z'| \iff |z-(-z')| = |z-z'|$

$\iff MM'' = MM' \iff$ M point de la médiatrice de [M'M'']



mais M'' symétrique de M' par rapport à O

d'où O milieu de [M'M''] et donc (MO) médiatrice de [M'M'']

Donc en particulier $(MO) \perp (M'O)$

④ est vraie.

IV ① $\forall m \in \mathbb{N}$, $f_m(0) = \dfrac{1}{2}$ d'où $A(0, \tfrac{1}{2}) \in C_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

② ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

f_0 dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = \dfrac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$e^{-x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

d'où $f_0'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f_0 strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ⓑ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ par inverse

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1$

donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0 = 1$

de m̂ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc par inverse et somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x} = +\infty$

et donc par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0 = 0$.

On déduit alors que $y = 0$ et $y = 1$ sont des asymptotes horizontales respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

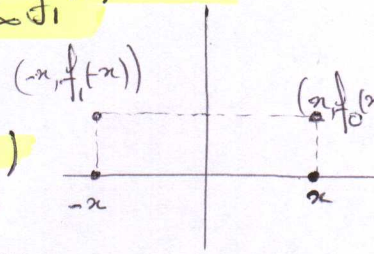
On a le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0(x)$	0 ↗	1

③ ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_1(-x) = \dfrac{e^{+x}}{1+e^{+x}} = \dfrac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})} = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x)$

ⓑ $\left.\begin{array}{l} X = -x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} f_0(X) = 0 \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{par composée}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ ✱ voir ✱ en bas pour les variati[ons]

De même $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f_0 = 1 \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{Composée}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 1$



ⓒ Les courbe C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à (Oy)

4ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$ en multipliant numérateur et dénominateur par e^{nx}.

ⓑ car $n \geqslant 2$.

$\left.\begin{array}{l} X = (n-1)x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (n-1)x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{Composée}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$.

de même $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} (n-1)x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{Composée}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(n-1)x} = 0$

On montre de même $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = 0$.

par somme on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx} + e^{(n-1)x} = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$.

et par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} + e^{(n-1)x} = 0^{+}$ donc $\lim\limits_{-\infty} f_n = +\infty$ (par inverse)

ⓒ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\dfrac{n e^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{\left(e^{nx} + e^{(n-1)x}\right)^2}$

$n e^{nx} > 0$; $(n-1)e^{(n-1)x} > 0$ d'où $f_n'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc f_n décroissante strictement sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 2$.

Note : ✱ $f_1(x) = f_0(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto -x \text{ décroissant sur } \mathbb{R} \\ X \longmapsto f_0(X) \text{ croissante sur } \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\Longrightarrow$ par composée, f_1 décroissante sur $\mathbb{R}$

B ① $u_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx$

$= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ (de la forme $\frac{u'}{u}$)

$= \left[-\ln|1+e^{-x}|\right]_0^1 = -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ (par linéarité)

$= \int_0^1 dx = 1$

on a donc $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0 \Rightarrow 1+e^{-x} > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} < 1$ car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow f_n(x) < e^{-nx}$ ($\times e^{-nx}$ avec $e^{-nx} > 0$)

On a donc l'encadrement suivant pour f_n :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$

les fonctions étant continues et les bornes dans l'ordre on a donc par intégration de l'inégalité $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

③ $\int_0^1 e^{-nx}\,dx = -\left[\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right)$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

et comme déjà vu à la question A2 $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n} = 1$;

donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$

d'où par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.