I - (Obligatoire)

① ⓐ $B_1 = h_{(A,\sqrt{2})}(B) \iff z_{B_1} = \sqrt{2}(z_B - z_A) + z_A$

$= \sqrt{2}(2-i) + i = 2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})$

ⓑ $B' = \mathcal{R}_{(A,\frac{\pi}{4})}(B_1) \iff z_{B'} = e^{i\pi/4}(z_{B_1} - z_A) + z_A$

$= e^{i\pi/4}(2\sqrt{2} + i(1-\sqrt{2}) - i) + i$

$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + i = (1+i)(2-i) + i$

$= 3+2i$

② ⓐ l'image de B par f a pour affixe

$(z_B)' = (1+i)z_B + 1$

$= (1+i)\times 2 + 1 = 3+2i = z_{B'}$ donc B a pour image B' par f

ⓑ $M(z)$ invariant par f $\iff z = (1+i)z + 1$

$\iff iz = -1 \iff z = i \iff M = A$

d'où A est le seul point invariant par f.

ⓒ $\forall z \neq i,\ \frac{z'-z}{i-z} = \frac{iz+1}{i-z} = \frac{i(z-i)}{i-z} = -i$

On déduit alors $\left|\frac{z'-z}{i-z}\right| = |-i|$ c'est-à-dire $\frac{MM'}{MA} = 1 \iff AM = MM'$

et $\text{Arg}\left(\frac{z'-z}{i-z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'})\ (2\pi)$ par thm donc $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ (2

donc $\forall M \neq A$, le triangle AMM' est rectangle isocèle direct en M'

③ ⓐ $M(z) \in \Sigma_1 \iff |z-2| = \sqrt{2}$

$\iff MB = \sqrt{2} \iff M \in \mathcal{C}(B,\sqrt{2})$

d'où Σ_1 est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

ⓑ $z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i$

$= (1+i)z - 2 - 2i = (1+i)z - 2(1+i) = (1+i)(z-2)$

Soit $M(z) \in \Sigma_1$, alors $|z' - 3 - 2i| = |(1+i)(z-2)|$

$= |1+i| \times |z-2|$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (car $|z-2| = \sqrt{2}$ puisque $M \in \Sigma_1$

d'où en notant $\Omega(3+2i)$ on a

$|z' - z_\Omega| = 2 \implies M' \in \mathcal{C}(\Omega, 2)$: M' point du cercle de centre Ω et rayo

II ① ⓐ pour $x>0$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

$= \frac{1}{2}3x^2 - x^2\ln x + 1$

et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$ par thm d'où $\lim\limits_{0} f = +1$

On déduit donc que f est continue en 0.

ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ d'où par somme et produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\ln x = -\infty$

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(3-2\ln x) = -\infty$

et donc par produit et somme, $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

② ⓐ soit $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour $x\neq 0$

$= \frac{1}{2}x(3-2\ln x) = \frac{3}{2}x - x\ln x$

et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ d'où $\lim\limits_{0} t = 0$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

ⓑ sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\longmapsto \ln x$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}$

$X \longmapsto 3-2X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc par composée $x\longmapsto 3-2\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

d'autre par $x\longmapsto \frac{1}{2}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par thm

donc par produit et somme f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

f étant de plus dérivable en 0, on déduit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall x>0$, $f'(x) = x(3-2\ln x) + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{2}{x}\right)$

$= 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x$

$= 2x(1-\ln x)$

③ Sur $\mathbb{R}_+$, $x\geq 0$ d'où le signe de f' est celui de $1-\ln x$.

et $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$ (car exp strict croissante sur on déduit le tableau de variations de f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}+1$	$\searrow$	$-\infty$

et $f(e) = \frac{e^2}{2} \times 1 + 1 = \frac{e^2}{2} + 1$

④ * Sur $[0;e]$; f est croissante donc $0 \leq x \leq e \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq$

et en particulier $f(x) \geq f(0) = 1$ donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0,e]$

* Sur $[e;+\infty[$

f est strictement décroissante
f est continue car dérivable
$f(e) = \frac{e^2}{2}+1 > 0$; $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.
$0 \in]-\infty ; \frac{e^2}{2}+1]$

$\Longrightarrow$ d'après le thm de la bijection $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [e;+\infty[$

D'autre part comme $f(x)=0$ n'a pas de solut° sur $[0;e]$ on déduit que α est l'unique solution de $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}_+$.
par balayage à la calculatrice on obtient $f(4,48) \simeq 7,5.10^{-3} > 0$
et $f(4,49) \simeq -0,037 < 0$ d'où $\alpha \simeq 4,48$ est une valeur approchée par défaut

III ① $(E_0) \Longleftrightarrow y' = -y+1$ donc (E_0) est une équation différentielle de la forme $y' = ay+b$

les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = Ke^{-x} + 1$; $K \in \mathbb{R}$ constante

② $\forall x \in D$, $f(x) = g(x)\cos^2 x$.

f solution de (E) $\Longleftrightarrow \forall x \in D \quad f'(x) + (1+2\tan x) f(x) = \cos^2 x$

$\Longleftrightarrow g'(x)\cos^2 x - 2\cos x \sin x \, g(x) + (1 + 2\frac{\sin x}{\cos x}) g(x)\cos^2 x = \cos^2$

$\Longleftrightarrow g'(x)\cos^2 x - 2\cos x \sin x \, g(x) + g(x)\cos^2 x - 2\sin x \cos x \, g(x) = \cos^2$

$\Longleftrightarrow \cos^2(x)\,(g'(x) + g(x)) = \cos^2 x$

$\Longleftrightarrow g'(x) + g(x) = 1$ (car $\forall x \in D$, $\cos x \neq 0$)

$\Longleftrightarrow g$ solution de (E_0).

③ f solution de $(E) \overset{②}{\iff} g$ solution de (E_0) (où $g(x) = \frac{f(x)}{\cos^2 x}$)

$\overset{①}{\iff}$ il existe $K \in \mathbb{R}$ tq $g(x) = Ke^{-x} + 1 \ \forall x \in D$

$\iff f(x) = \cos^2 x \times (Ke^{-x} + 1)$

De plus $f(0) = 0 \iff K + 1 = 0 \iff K = -1$

Donc la solution de (E) satisfaisant $f(0) = 0$ est

$f(x) = \cos^2 x\,(1 - e^{-x}) \ \forall x \in D.$

IV Ⓐ ① ⓐ $X = -x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

$\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$ (par thm)

Composée $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{-x} = 0$

d'où $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

ⓑ f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$
$= e^{-x}(1 - x)$

$\forall x \geq 0 ; \ e^{-x} > 0$ donc le signe de f' est celui de $1 - x$

d'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

② ⓐ

Sur $]0, 1[$

f est strictement croissante
f est continue car dérivable
$f(0) = 0 \ ; \ f(1) = \frac{1}{e}$
$m \in]0 ; \frac{1}{e}[$

Thm de la bijection :
$\Rightarrow$ il existe $\alpha \in]0;1[$ unique tel que $f(\alpha) = m$

Sur $]1 ; +\infty[$

f est strictement décroissante
f est continue car dérivable
$f(1) = \frac{1}{e} \quad \lim\limits_{+\infty} f = 0$
$m \in]0 ; \frac{1}{e}[$

$\Rightarrow$ il existe $\beta \in]1, +\infty[$ unique tel que $f(\beta) = m$

On déduit donc que sur $[0,+\infty[$, $f(x)=m$ admet donc deux solutions. (les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$) étant disjoints).

ⓑ Par balayage à la calculatrice dans le cas où $m=\frac{1}{4}$ on obtient :
$f(0{,}35)\simeq 0{,}246\ldots<\frac{1}{4}$; $f(0{,}36)\simeq 0{,}251\ldots>\frac{1}{4}$ donc $0{,}35<\alpha<0{,}36$.

ⓒ • $f(x)=0 \iff xe^{-x}=0 \iff x=0$ car $\forall x,\ e^{-x}>0$.

• $f(x)=\frac{1}{e} \iff x=1$ d'après le tableau de variations.
(en effet pour $x<1$, $f(x)<f(1)=\frac{1}{e}$ car $f\nearrow$
et pour $x>1$, $f(x)<f(1)$ car $f\searrow$)

Ⓑ ⓐ voir annexe

ⓑ Soit P_n la ppté $u_n>0$.
Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie

Etape 1 : $u_0=\alpha>0 \Rightarrow P_0$ est vraie.

Etape 2 : Pour $q\in\mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

$u_q>0$ car P_q vraie $\Rightarrow u_q e^{-u_q}>0$ (car $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$)
$\Rightarrow u_{q+1}>0$
donc P_{q+1} vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = u_n e^{-u_n}-u_n$
$= u_n(e^{-u_n}-1)$

or $\forall n$, $u_n>0 \Rightarrow -u_n<0$
$\Rightarrow e^{-u_n}<1$ (car $x\mapsto e^x$ croissante sur $\mathbb{R}$)
$\Rightarrow e^{-u_n}-1<0$.

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n<0$ d'où (u_n) décroissante

ⓓ (u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers une limite $l\geq 0$.

Nous avons $\left.\begin{array}{l} u_{n+1}=f(u_n) \\ f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+ \\ (u_n) \text{ converge vers } l\in\mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le thm du point fixe $f(l)=l$

$f(\ell)=\ell \iff \ell e^{-\ell}=\ell$

$\iff \ell(1-e^{-\ell})=0$

$\iff \ell=0$ ou $e^{-\ell}=1$

$\iff \ell=0$ ou $-\ell=0$ (car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$)

d'où la limite de (u_n) est $\ell=0$.

② ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln(u_{n+1})$

$= \ln u_n - \ln(u_n e^{-u_n})$

$= \ln u_n - \ln u_n - \ln(e^{-u_n})$

$= -\ln(e^{-u_n}) = u_n$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$

$= (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + \cdots\cdots + (w_n - w_{n+1})$ d'après ⓐ

$= w_0 - w_{n+1}$ après simplification.

ⓒ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Composée}} \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = w_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = +\infty$.

③ $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \alpha$ donc en particulier $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$
pour la suite (v_n) il faut donc trouver v_0 tel que $v_1 = f(v_0) = \frac{1}{4}$
et d'après (A 2 b) il y a deux solutions pour cela : $v_0 = \alpha$ ou $v_0 = \beta$.
donc en prenant $v_0 = \beta$ on a $\forall n \geqslant 1$ $v_n = u_n$.