# (I) Spécialité.

(A) (1) $\left.\begin{array}{l}3y = 5\times(15-x)\\ 3\wedge 5 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ 3 divise $15-x$

donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tq $15-x = 3k$

$\Rightarrow x = 15-3k$

on a alors $3y = 5\times 3k$ et donc $y = 5k$

Vérifions que $(15-3k, 5k)$, $k\in\mathbb{Z}$ est solution.

$3\times 5k = 15k$ et $5\times(15-x) = 5\times 3k = 15k$ donc $S = \{(15-3k, 5k), k\in\mathbb{Z}$

(2) lorsque le point A subit p rotations $r_1$ et q rotation $r_2$ il parcourt une distance de $p\frac{\pi}{3} + q\frac{\pi}{5}$ centimètres.

or 2,5 tours équivalent à une distance de $2,5\times 2\pi$ cm.

on cherche donc les valeurs p et q satisfaisant

$p\frac{\pi}{3} + q\frac{\pi}{5} = 5\pi \iff 5p+3q = 75$

$\iff 3q = 5(15-p)$

$\iff (p;q)$ solution de (E) avec $(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$\iff \left\{\begin{array}{l}p = 15-3k\\ q = 5k\\ p\geq 0\,;\, q\geq 0\end{array}\right.$

$q\geq 0 \iff k\geq 0$

$p\geq 0 \iff 15-3k\geq 0 \iff k\leq 5$

l'ensemble des couples cherchés est $S = \{(15-3k, 5k)\,;\, k = 0, 1, \dots 5\}$

$S = \{(15;0)\,;(12,5)\,;(9,10)\,;(6;15)\,;(3;20)\,;($

(B) (1) $r_1, h_1, r_2, h_2$ sont des homothéties et rotations de centre O

donc les composées sont des similitudes de centre O.

$r_1 = S_{(O,\frac{\pi}{3},1)}$ ; $h_1 = S_{(O,0,4)}$ ; $r_2 = S_{(O,\frac{\pi}{5},1)}$ ; $h_2 = S_{(O,-\pi,6)}$

Donc $s_1 = r_1\circ h_1$ similitude de centre O, rapport 4 et angle $\frac{\pi}{3}$

et $s_2 = r_2\circ h_2$ - - - - - - - - - 6 et angle $-\frac{4\pi}{5}$

② ⓐ $S_n = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ $n$ fois et $s_1 = S_{(O,\frac{\pi}{3},4)}$

$\Rightarrow S_n = S_{(O,\, n\frac{\pi}{3};\, 4^n)}$ similitude de centre O et d'angle $n\frac{\pi}{3}$, rapport $4^n$

de même $S'_n = S_{(O,\, \frac{6n\pi}{5};\, 6^n)}$ similitude de centre O, d'angle $\frac{6n\pi}{5}$, rapport $6^n$

donc par composée

$$f = S'_n \circ S_n = S_{(O,\, n\frac{\pi}{3}+\frac{6n\pi}{5};\, 4^n \times 6^n)}$$

est une similitude de centre O, d'angle $\frac{n\pi}{3} + \frac{6n\pi}{5}$ et rapport $4^n \times 6^n$

et $4^n \times 6^n = (2^2)^n \times (2\times3)^n = 2^{2n+n} \times 3^n$

ⓑ $f$ homothétie de rapport 144 $\Leftrightarrow f = S_{(O,0,144)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\frac{\pi}{3} + \frac{6n\pi}{5} = 0 \quad (2\pi) \quad (1) \\ 2^{2n+n} \times 3^n = 144 \quad (2) \end{cases}$$

et $144 = 2^4 \times 3^2$ d'où $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2n+n = 4 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

on a alors $n\frac{\pi}{3} + \frac{6n\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + \frac{12\pi}{5} = \frac{41\pi}{15} \neq 0 \ (2\pi)$

donc $f$ ne peut être une homothétie de rapport 144.

ⓒ $M(6)$ $M'$ image de $M$ par $f$ similitude de centre O

donc $\frac{OM'}{OM} = k$ où $k$ rapport de $f$

$\Leftrightarrow OM' = 6 \times (2^{2n+n} \times 3^n)$

$OM' = 240 \Leftrightarrow 6(2^{2n+n} \times 3^n) = 240$

$\Leftrightarrow 2^{2n+n+1} \times 3^{n+1} = 2^4 \times 3 \times 5$ et ceci est impossible car 5 ne divise ni 2 ni 3

On ne peut donc pas trouver une homothetie $f$ telle que $OM' = 240$.

$576 = 4 \times 144 = 2^6 \times 3^2$

donc $OM' = 576 \Leftrightarrow 2^{2n+n+1} \times 3^{n+1} = 2^6 \times 3^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+n+1 = 6 \\ n+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

La mesure principale est donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{2\pi}{15} \ (2\pi)$.

on a alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaire donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{6n\pi}{5} + \frac{n\pi}{3} = \frac{28\pi}{15}$ (