Devoir Mathématiques N° 2

2 oct 2008

I Soit $g(x) = (\cos x)^{15}$, $x \in \mathbb{R}$; g dérivable d'après les règles de dérivabilité et $g'(x) = -15(\cos x)^{14} \sin x$

$$f(x) = \frac{(\cos x)^{15} - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \quad \text{d'où} \quad \lim_0 f = g'(0) = 0.$$

II $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x^2+1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$; Soit $$t(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1 - \sqrt{2x^2+1}}{x^2} = \frac{1 - (2x^2+1)}{x^2(1 + \sqrt{2x^2+1})} = \frac{-2}{1 + \sqrt{2x^2+1}}$$

Donc $\lim_0 t = -1$

$\Rightarrow f$ dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

Par thm f dérivable $\Rightarrow$ f continue d'où f continue en 0.

III $f(x) = \sin^3 x$; $x \in \mathbb{R}$, f dérivable d'après les règles de dérivation et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(\sin x)^2(+\cos x)$.

f' dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 3 \times 2 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + 9f(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x \cos^2 x + 6 \sin^3 x$
$= 6 \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \sin x$

IV 1) a) $g(x) = x^3 - 3x + 4$; $x \in \mathbb{R}$

g dérivable d'après les règles de dérivation sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x^2 - 1)$

d'où

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

et $\lim_{+\infty} g = +\infty$ (par thm)

$\lim_{-\infty} g = -\infty$ (par thm)

b) • sur $]-\infty ; +1]$; -2 est le maximum de g $\Rightarrow$ $g(x) = 0$ n'admet pas de solut° sur $]-\infty, 1]$

• sur $[1 ; +\infty[$, g strictement croissante
g continue car g dérivable
$g(1) = -6$; $\lim_{+\infty} g = +\infty$
$0 \in [-6 ; +\infty[$

$\Rightarrow$ d'après le thm de la bijection il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ unique tq $g(\alpha) = 0$.

Conclusion : Sur $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution $\mathbb{R}$.

c) Sur $]-\infty, +1]$, -2 est le maximum donc $g(x) < 0$.

Sur $[1, +\infty[$ g strictement croissante

si $1 \leq x < \alpha$ alors $g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

si $\alpha < x$ alors $g(\alpha) < g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x)$

d'où le signe de g est donné par

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

② $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$; $x > 1$

ⓐ f dérivable pour $x>1$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \in]1,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(3x^2+4x) - 2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$$

sur D ; $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ (x^2-1)^2>0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ f' et g ont le m̂ signe sur D.

ⓑ par thm, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$.

x		-1		$+1$	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{1^+} x^2-1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 1} x^3+2x^2 = 3 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ par quotient $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$.

ⓒ

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ⓓ $2{,}19 < \alpha < 2{,}2$

Notons $a = 2{,}19$; $b = 2{,}2$

alors $a < \alpha < b$

$\Rightarrow a^2 < \alpha^2 < b^2$ car $x \mapsto x^2$ croissant sur $\mathbb{R}_+$

et $a^3 < \alpha^3 < b^3$ car $x \mapsto x^3$ ————

Donc par somme $a^3 + 2a^2 < \alpha^3 + 2\alpha^2 < b^3 + 2b^2$ (∗).

et $a^2-1 < \alpha^2 - 1 < b^2 - 1$ d'où

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2-1} > \dfrac{1}{\alpha^2-1} > \dfrac{1}{b^2-1}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $\dfrac{1}{b^2-1} < \dfrac{1}{\alpha^2-1} < \dfrac{1}{a^2-1}$

dans (∗) et dans cette dernière inégalité les membres sont positifs donc

par produit on a $\dfrac{a^3+2a^2}{b^2-1} < f(\alpha) < \dfrac{b^3+2b^2}{a^2-1}$

ⓔ Soit $h(x) = f(x) - (x+2)$

$$= \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - (x+2) = \frac{x^3+2x^2-(x^2-1)(x+2)}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^3+2x^2-x^3-2x^2+x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = 0$ (par quotient) donc $\Delta : y = x+2$ asymptote à C en $+\infty$.

sur D ; $x^2-1>0$; $x+2>0$ $\Rightarrow$ $h(x)>0$ sur D donc sur D C est au dessus de Δ