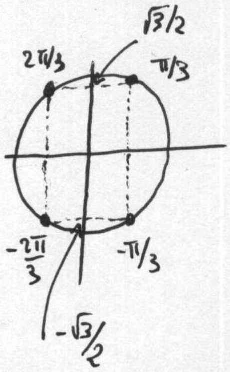
Devoir N° 1 . Mathématiques TS6 — 19 sept 2008

I ① $4\sin^2 x - 3 < 0 \iff \sin^2 x < \frac{3}{4}$



$\iff |\sin x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x \in \left]-\pi/3 ; \pi/3\right[\cup \left]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right[$

Les solutions de l'équation sont $S = \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right[$

② Soit h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$; $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

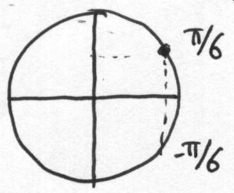
$h(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x$
$= 3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$
$= 3 - 4\sin^2 x$

d'où $h(x) > 0 \iff 4\sin^2 x - 3 < 0 \iff x \in S$.

Finalement C_f au-dessus de C_g pour $x \in \left]-\pi/3 ; \pi/3\right[\cup \left]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right[$

et C_f en-dessous de C_g pour $x \in \left]-\frac{2\pi}{3} ; -\pi/3\right[\cup \left]\pi/3 ; \frac{2\pi}{3}\right[$.

II $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$D = \left]-\pi ; \pi\right]$

$\iff 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

ou

$3x = -\pi/6 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

pour $k = 0$, $x = \pi/18 \in D$ ou $x = -\pi/18 \in D$

pour $k = 1$; $x = \frac{13\pi}{18} \in D$ ou $x = \frac{11\pi}{18} \in D$.

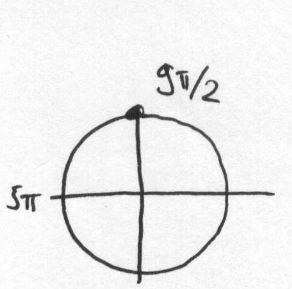
pour $k = 2$; $x = \frac{25\pi}{18} \notin D$ ou $x = \frac{23\pi}{18} \notin D$

pour $k = -1$; $x = \frac{-11\pi}{18} \in D$ ou $x = -\frac{13\pi}{18} \in D$.

pour les autres valeurs de k ; les solutions ne sont pas dans l'intervalle D.

$S = \left\{\frac{\pi}{18} ; \frac{-\pi}{18} ; \frac{13\pi}{18} ; \frac{11\pi}{18} ; \frac{-11\pi}{18} ; \frac{-13\pi}{18}\right\}$

III on a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$



donc $\cos x = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ mais $x \in \left[\frac{9\pi}{2} ; 5\pi\right]$ (et $\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$; $5\pi = 4\pi + \pi$)

Donc sur $\left[\frac{9\pi}{2} ; 5\pi\right]$; $\cos x \leq 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

IV $x^2+2mx+m^2+m-3=0$.

$\Delta = 4m^2-4m^2-4m+12$ donc pour
$= 12-4m$

$\Delta > 0 \iff 4m<12 \iff m<3$.

donc pour $m<3$ l'équation a deux solutions.
pour $m=3$ l'équation a une solution unique.
pour $m>3$ l'équation n'a pas de solution.

V ① $f(x) = x \sin 1/\sqrt{x}$
$= \sqrt{x} \cdot \dfrac{\sin 1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}}$

soit $X = 1/\sqrt{x}$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1/\sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin 1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = 1$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$\forall x>0$; $-1 \leq \sin 1/\sqrt{x} \leq 1$

$\Rightarrow -x \leq x \sin 1/\sqrt{x} \leq x$ ($\times x$ avec $x>0$).

et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ d'où d'après le thm des gendarmes $\lim\limits_{0} f = 0$.

② $g(x) = \dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$;

par thm, $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{-x} = 0$.

Soit $P(x) = -x^2+7x-12$;

$\Delta = 49-48 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-7+1}{-2} = 3$ et $x_2 = 4$ sont les racines de P

d'où $P(x) = (3-x)(x-4)$ et le signe de P est donné par

x		3		4
$P(x)$	$-$	0	$+$	0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^+} 2x-6 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} P(x) = 0^-\end{array}\right\}$ par quotient et règle des signes. $\Rightarrow \lim\limits_{4^+} f = -\infty$.

③ $h(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{\sin(3/x)} = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} \times \dfrac{1}{x} \times \dfrac{3/x}{\sin 3/x} \times \dfrac{1}{3/x}$

$= \dfrac{\sin 1/x}{1/x} \times \dfrac{3/x}{\sin 3/x} \times \dfrac{1}{3}$.

Soit $X = 1/x$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$
$\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$
} par composée $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} = 1$

$X = 3/x$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 3/x = 0$
$\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$
} Composée $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin 3/x}{3/x} = 1$ donc par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3/x}{\sin 3/x} = 1$

Finalement, par produit, $\lim\limits_{+\infty} h = \dfrac{1}{3}$.

VI $\forall x < 0$; $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow -x \geq x \sin x \geq x$ ($\times x$ avec $x < 0$)

$\Leftrightarrow x^2 - x \geq f(x) \geq x^2 + x$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x = +\infty$ par thm donc par comparaison $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$

VII $\dfrac{1}{1-x^2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-(1-x^2)}{1-x^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1-x^2} < 0$

x		-1		0		1	
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{x^2}{1-x^2}$	$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$

Donc $S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

VIII Non spécialiste

$|x+1|^2 + 4|x+1| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = |x+1| \\ X^2 + 4X - 2 = 0 \quad (E) \end{cases}$ (*)

Résolut° de (E) : $\Delta = 24$

$X_1 = \dfrac{-4+\sqrt{24}}{2} = -2 + \sqrt{6}$ et $X_2 = -2 - \sqrt{6}$

on a $X_1 > 0$ et $X_2 < 0$.

d'où $(*) \iff \begin{cases} |x+1| = X \\ X = X_1 \text{ ou } X = X_2 \end{cases} \iff |x+1| = 2+\sqrt{6}$ ou $\underbrace{|x+1| = 2-\sqrt{6}}_{\text{impossible}}$

d'où $|x+1| = -2+\sqrt{6} \iff x+1 = -2+\sqrt{6}$ ou $x+1 = 2 -\sqrt{6}$

$\iff \underline{x = -3+\sqrt{6}}$ ou $\underline{x = 1 -\sqrt{6}}$.

$S = \{-1-\sqrt{6} ; -3-\sqrt{6}\}$.

VIII Spécialité.

Soit P_n la propriété $9 | A_n$ avec $A_n = 4^n - 1 - 3n$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie (par récurrence).

Etape 1 : pour $n = 0$; $A_0 = 0$ et $9 | 0 \Rightarrow P_0$ vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $4^q - 1 - 3q = 9k$.

$A_{q+1} = 4^{q+1} - 1 - 3(q+1)$

$= 4^q \times 4 - 4 - 3q$

$= (9k + 1 + 3q)4 - 4 - 3q$ par hypothèse de récurrence

$= 9k \times 4 + 4 + 12q - 4 - 3q$

$= 9(4k + q) \Rightarrow 9 | A_{q+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ la ppté P_n est vraie : $9 | 4^n - 1 - 3n$.

IV Suite : pour que -1 soit racine, on a $(-1)^2 - 2m + m^2 + m - 3 = 0$

$\iff m^2 - m - 2 = 0$

$\Delta = 9$ d'où $m = 2$ ou $m = -1$

si x_1 et x_2 sont les racines, on sait que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2m$.

donc si $x_1 = -1$ alors $x_2 = -2m + 1$

pour $m = 2$ l'autre racine est $x_2 = -3$

pour $m = -1$ ---------- $x_2 = +3$