TS6 — Devoir de Maths n°3 (2h) 24/10/2008

(I) ① $\ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = 1$. (E)

domaine de résolution : $\frac{5-4x}{x+3} > 0$

x		-3		$5/4$	
$\frac{5-4x}{x+3}$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

donc $D =]-3 ; \frac{5}{4}[$.

(E) $\iff \ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = \ln e$

$\iff \frac{5-4x}{x+3} = e$ (car ln est strictement croissante).

$\iff 5-4x = e(x+3) \iff x(e+4) = 5-3e$

$\iff x = \frac{5-3e}{e+4} \in D$ d'où $S = \left\{\frac{5-3e}{e+4}\right\}$.

② $\frac{1}{2}\ln(x+3) = \ln(x+1)$ (E).

domaine de résolution : $x > -1$; $x > -3$ d'où $D =]-1 ; +\infty[$.

(E) $\iff \ln\sqrt{x+3} = \ln(x+1)$

$\iff \sqrt{x+3} = x+1$ car ln est strictement croissante.

(sur D) $\iff x+3 = (x+1)^2$ (sur

$\iff x^2+x-2 = 0$.

$\Delta = 9$ d'où $x = \frac{-1+3}{2} = 1 \in D$ ou $x = \frac{-1-3}{2} = -2 \notin D$ d'où $S = \{1\}$.

(II) ① $f(x) = 2\sin(5x) + 3\sin(3x) + 4\sin(x)$ admet pour primitive $F(x) = -\frac{2}{5}\cos(5x) - \cos 3x - 4\cos x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x(x^2-6)\sqrt{x^2-6}$
$= \frac{1}{2}(2x)(x^2-6)^{3/2}$

d'où f admet pour primitive sur D

$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-6)^{5/2}}{5/2} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{1}{5}(x^2-6)^2\sqrt{x^2-6} + K$.

③ $f(x) = x^2(x^3-\pi)^4$
$= \frac{1}{3}\,3x^2(x^3-\pi)^4$

d'où f admet pour primitive :

$F(x) = \frac{1}{3}\frac{(x^3-\pi)^5}{5} + K$; $K \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{1}{15}(x^3-\pi)^5 + K$.

④ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$; $D =]-1 ; 1[$.

c'est de la forme $\frac{u'}{u}$; la primitive est $F(x) = \ln|x^2-x| + K$ $K \in \mathbb{R}$.

d'où $F(x) = \ln(x-x^2) + K$

⑤ $f(x) = \cos x(\sin x)^{-4} \Rightarrow F(x) = \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + K$; $K \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3 x} + K$.

III ① $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)$

$= \cos^3 x$.

② On déduit alors la primitive de f : $F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + K$; $K \in \mathbb{R}$

de plus $F(0) = 0 \iff K = 0$ d'où $F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3}$.

IV F et G primitives de f sur I.

Soit $H = F - G$. H est dérivable sur I d'après les règles de dérivation

et $\forall x \in I$; $H'(x) = F'(x) - G'(x)$

$= f(x) - f(x) = 0$ donc $H'(x) = 0$ $\forall x \in I$

$\Rightarrow H$ constante sur I

$\Rightarrow H = K \in \mathbb{R}$

d'où $\forall x \in I$ $F(x) - G(x) = K$

$\Rightarrow F(x) = G(x) + K$ (F et G diffèrent d'une constante).

V $f(x) = \sqrt{|x-3|}$.

① $x \longmapsto x-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$

$X \longmapsto |X|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

$Y \longmapsto \sqrt{Y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par composée, $x \longmapsto \sqrt{|x-3|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

② Soit $t(x) = \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3}$; $x \neq 3$.

$= \dfrac{\sqrt{|x-3|}}{x-3}$.

si $x > 3$; $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^+} x-3 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \sqrt{X} = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0^+$

$\Rightarrow \lim\limits_{3^+} t = +\infty$ n'est pas fini.

donc f ne peut pas être dérivable en $x = 3$

VI ① $f(x) = \ln(\tan x)$. sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

f dérivable d'après les règles de dérivation et $f'(x) = \dfrac{(\tan x)'}{\tan x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \times \dfrac{1}{\tan x}$

$= \dfrac{1}{\sin x \cos x}$.

② $f(x) = x(\ln x)^3$; f dérivable d'après les règles de dérivation.

et $\forall x \in D$; $f'(x) = (\ln x)^3 + x \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$= (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$

(VII) ① Sur I_0 ; $E(x)=0$ d'où $f(x) = x - xE(x) = x$

pour $x \in I_1$; $E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 0$.

② pour $x \in I_{-1}$; $f(x) = x - x(-1) = 2x$.

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ (car pour $x \in I_0$; $f(x) = x$).

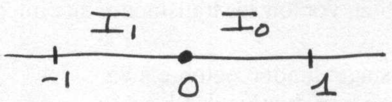
$\lim\limits_{x\to 0^-} f = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0$ (car pour $x \in I_{-1}$; $f(x) = 2x$)

d'où f est continue en 0.

Dérivabilité : $t(x) = \dfrac{f(x) - 0}{x - 0}$ pour $x \neq 0$.

$\iff t(x) = \dfrac{x - xE(x)}{x} = 1 - E(x)$.

et $\lim\limits_{x\to 0^+} t = 1$ car $E(x) = 0$ sur I_0



et $\lim\limits_{x\to 0^-} t = 2$ car $E(x) = -1$ sur I_{-1} donc f non dérivable en 0 mais admet deux demi-tangentes

(VIII) ① $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\times\ln(x) = +\infty$ c.à-d $\lim\limits_{0} f = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

② $$f(x) = \frac{2\ln x + 7}{x + \ln x} = \frac{\ln x\left(2 + \frac{7}{\ln x}\right)}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}$$

et par thm, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{7}{\ln x} = 2$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$.

③ $$f(x) = \frac{\ln(1-4x)}{x} = \frac{\ln(1-4x)}{-4x} \times (-4)$$

$X = -4x$

$\lim\limits_{x\to 0} -4x = 0$

$\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

$\Rightarrow$ par composée $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-4x)}{-4x} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{0} f = -4$ (par produit)

④ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan x}$;

$= \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{\sin x} \times \cos x$.

par thm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc par inverse $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ d'où par produit, $\lim\limits_{0} f = 1$

IX

① $f(x) = x(\ln x - 2) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 2 = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ par thm, donc par somme, $\lim\limits_{0} f = 1$.

② $\forall x > 0$, f dérivable d'après les règles de dérivation.

$f'(x) = 1 + \ln x - 2$

$= \ln x - 1$

$f'(x) > 0 \iff \ln x > 1 \iff \ln x > \ln e \iff x > e$ car $\ln$ strict $\nearrow$.

d'où le tableau :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(e) = e - 2e + 1$

$= -e + 1$

③ f est continue sur $[e, +\infty[$ (car dérivable)

f est strictement croissante sur cet intervalle.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $f(e) = 1 - e < 0$

$\Rightarrow$ il existe $\alpha \in [e, +\infty[$ unique tq $f(\alpha) = 0$.