Terminale S 6 — Devoir N°4 — 10 nov 2008

$D = \mathbb{R}_+^*$

I ① Soit $P(X) = X^2 - 7X + 12$.

$\Delta = 49 - 48 = 1 \Rightarrow X_1 = \frac{7+1}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{7-1}{2} = 3$ sont les racines de P $\Rightarrow P(X) = (X-4)(X-3)$

$(\ln x)^2 - 7\ln x + 12 \leq 0 \iff P(X) \leq 0 \iff (\ln x - 4)(\ln x - 3) \leq 0$

$\ln(x) - 3 \geq 0 \iff \ln x \geq \ln e^3 \iff x \geq e^3$ car $\ln$ strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\ln x - 4 \geq 0 \iff \ln x \geq \ln e^4 \iff x \geq e^4$ car $\ln$ strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où

x		e^3		e^4	
$\ln x - 3$	$-$	0	$+$		$+$
$\ln x - 4$	$-$		$-$	0	$+$
$P(\ln x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S =]e^3 ; e^4[$

② $\ln(x^2-4) \leq \ln 2 + \ln x$;

Domaine de résolut° : $x^2 - 4 > 0 \iff x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$.
et $x > 0$.

d'où $D =]2 ; +\infty[$. donc $\ln(x^2-4) \leq \ln 2 + \ln x \iff \ln(x^2-4) \leq \ln 2x$
$\iff x^2 - 4 \leq 2x$ car $\ln$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$\iff x^2 - 2x - 4 \leq 0$.
$\Delta = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1+\sqrt5$
et $x_2 = 1 - \sqrt5$.

d'où d'après la règle du signe du binôme $S = [1-\sqrt5 ; 1+\sqrt5] \cap D =]2 ; 1+\sqrt5]$.

II $x \longmapsto x^{12}$ dérivable sur D à valeurs dans D
$X \longmapsto \ln X$ ------------- à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (si $X > 1$; $\ln X > 0$).
$X \longmapsto \ln X$ ------- $\mathbb{R}_+^*$ -------- $\mathbb{R}$

donc par composée $f(x) = \ln(\ln x^{12})$ dérivable sur D.

et $\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{(\ln x^{12})'}{\ln x^{12}} = \frac{(12\ln x)'}{\ln x^{12}} = \frac{12}{x \ln x^{12}} = \frac{1}{x\ln x}$

III ① $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, de la forme $\frac{u'}{u}$ d'où $F(x) = \ln|\sin x| + K$, $K \in \mathbb{R}$

mais sur $]-\frac{\pi}{2} ; 0[$; $\sin x < 0$ d'où $F(x) = \ln(-\sin x) + K$.

② $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{1/2}$ est de la forme $u'u^{1/2}$

d'où $F(x) = \frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2} + K$ donc $F(x) = \frac{2}{3}\ln x . \sqrt{\ln x} + K$; $K \in \mathbb{R}$.