TS 6 — Devoir N°5 — 24 Nov 2008

I

① $e^x = -4$; $S = \emptyset$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$.

② $(e^x - 4)^2 = 9 \iff e^x - 4 = -3$ ou $e^x - 4 = +3$
$\iff e^x = 1$ ou $e^x = 7 \iff x = \ln 7$ (car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$)

donc $S = \{0 ; \ln 7\}$

③ $e^{x^2} \leq \frac{1}{e} \iff x^2 \leq \ln(1/e)$ (car $\ln$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)
$\iff x^2 \leq -1$ d'où $S = \emptyset$

④ $e^{(x^2)} \leq (e^x)^2 \iff e^{(x^2)} \leq e^{2x}$
$\iff x^2 \leq 2x$ (car exp strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)
$\iff x(x-2) \leq 0$ d'où $S = [0 ; 2]$

⑤ $e^x + 1 \leq \frac{6}{e^x} \iff e^{2x} + e^x - 6 \leq 0$

Soit $P(X) = X^2 + X - 6$

$\Delta = 25$, $X_1 = \frac{6}{2} = -3$; $X_2 = \frac{+4}{2} = +2 \implies P(X) = (X+3)(X\ 2)$.

d'où $(E) \iff (e^x + 3)(e^x - 2) \leq 0$.

or $e^x + 3 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x - 2 \leq 0 \iff e^x \leq 2$
$\iff x \leq \ln 2$ car $\ln$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $S =]-\infty ; \ln 2]$

⑥ $x(2e^x - 1) \geq 0$

$2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \ln\frac{1}{2}$ (car $\ln$ strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

d'où le tableau de signes (Attent° $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$)

x		$\ln 1/2$		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
Produit	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $S =]-\infty ; \ln\frac{1}{2}] \cup [0, +\infty[$

II $f(x) = x e^{1/x}$

$\left.\begin{array}{l} X = \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \implies$ par composée, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \implies \lim\limits_{0^-} f = 0$

$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1/x}$; $\left.\begin{array}{l} X = 1/x \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ (par théor)} \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{0^+} f = +\infty$

② $f(x) = \dfrac{e^x}{3x^2+5} = \dfrac{e^x}{x^3} \times \dfrac{x^3}{3x^2+5}$ pour $x \neq 0$

et par thm, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3x^2+5} = +\infty$

Donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

③ $f(x) = \dfrac{e^{4x}-1}{3x} = \dfrac{e^{4x}-1}{4x} \times \dfrac{4}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} X = 4x \\ \lim\limits_{x \to 0} 4x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1 \end{array}\right\}$ $\overset{\text{Composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{4x} = 1$

$\Rightarrow$ par produit $\lim\limits_{0} f = \dfrac{4}{3}$

④ $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x+1}{2}} - \sqrt{e}}{x}$.

Soit $g(x) = e^{(x+1)/2}$; g dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivabilité

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{2}}$

On a $f(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f = g'(0) = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

III ① f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^{1/x} - \dfrac{1}{x^2}(3x+1)e^{1/x}$

$= \dfrac{e^{1/x}}{x^2}(3x^2 - 3x - 1)$

② $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+7)^3} = \dfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+7)^3}}_{\text{de la forme } u'u^{-3}}$

Donc $F(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(e^{2x}+7)^2} \times \dfrac{1}{(-2)} + K$ $\quad K \in \mathbb{R}$ est une primitive de f

$F(x) = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{(e^{2x}+7)^2} + K$.

IV ① $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Soit $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

$= e^x(e^x - 1 + e^{-x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ d'où par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 1 + e^{-x} = +\infty$

Donc par produit, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ d'où par produit $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

donc par somme $\lim_{-\infty} g = 1$

$\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition avec g, $\underline{\lim_{+\infty} f = +\infty}$.

$\lim_{X \to 1} \ln X = 0$ donc par composit° avec g, $\underline{\lim_{-\infty} f = 0}$.

② f dérivable d'après les règles de dérivation.

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(e^{2x} - e^{x} + 1)'}{e^{2x} - e^{x} + 1} = \dfrac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1} = \dfrac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1}$

Soit $P(X) = X^2 - X + 1$; $\Delta = -3 < 0$

$\Rightarrow$ P garde un signe constant positif $\Rightarrow P(e^{x}) = e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc le signe de f' est celui de $N(x) = e^{x}(2e^{x} - 1)$

$2e^{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$.

d'où le tableau de signe

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	

et le tableau de variations

x		$-\ln 2$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\ln 3 - 2\ln 2$	↗ $+\infty$

$f(-\ln 2) = \ln\left(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)$

$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - 2\ln 2$

④ $f(x) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

d'où $f(x) - 2x = \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (par quotient)

puis par produit $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

donc par somme puis par composée $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = 0$

Finalement : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ d'où <u>D asymptote oblique à C en $+\infty$.</u>