I ① ⓐ $y'+2y=0$ ~~est~~ une éq de la forme $y'=ay$

les solutions sont donc les fonctions de la forme $f(x)=Ke^{-2x}$; $x\in\mathbb{R}$, $K\in\mathbb{R}$.

ⓑ $y''+2y'=0$; si f solution de (E'), alors $f''+2f'=0$

d'où $(f')'+2(f')=0 \iff f'$ solution de (E)

d'où f' est de la forme $f'(x)=Ke^{-2x}$ $K\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

donc f est une primitive de f' : $f(x)=-\frac{K}{2}e^{-2x}+K'$; $K,K'\in\mathbb{R}$

(réciproquement, il est clair que une telle fonction est solution de (E))

d'où : les solutions de (E) sont les $f°$: $x \longmapsto Ke^{-2x}+K'$; $x\in\mathbb{R}$, K,K' constante

② ⓐ $g(x)=ae^{-x}+b$; $x\in\mathbb{R}$

g dérivable d'après les règle de dérivat° donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-ae^{-x}$

g solution de (E') $\iff \forall x\in\mathbb{R}$ $g'(x)+2g(x)=2e^{-x}-6$

$\iff \forall x\in\mathbb{R}$, $-ae^{-x}+2ae^{-x}+2b=2e^{-x}-6$

$\iff \forall x\in\mathbb{R}$ $ae^{-x}+2b=-6+2e^{-x}$

d'où par identificat° $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $a=2$ et $b=-3$.

Donc $g(x)=2e^{-x}-3$.

ⓑ $f-g$ solution de (E) $\iff f'-g'+2(f-g)=0$

$\iff f'+2f=g'+2g$

$\iff \forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)+2f(x)=2e^{-x}-6$

$\iff f$ solution de (E')

ⓒ d'après ce qui précède

f solution de (E') $\iff f-g$ solution de (E)

$\iff f(x)-g(x)=Ke^{-2x}$; $K\in\mathbb{R}$

$\iff f$ de la forme, $f(x)=Ke^{-2x}+g(x)$, $K\in\mathbb{R}$

c'est-à-dire $\underline{f(x)=Ke^{-2x}+2e^{-x}-3}$ $K\in\mathbb{R}$.

③ $f(\ln 2)=-7/4$

$\iff K\times 2^{-2}+2\times 2^{-1}-3=-\frac{7}{4} \iff \frac{K}{4}=-\frac{7}{4}+2$

$\iff \underline{K=1}$

d'où $\underline{s(x)=e^{-2x}+2e^{-x}-3}$

II ① ⓐ, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ et f solution de (E).

f étant dérivable, g dérivable et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x^2} + \frac{f'(x)}{x}$

Vérifions que g solution de (E')

f solution de (E) $\iff x f'(x) - 2x f(x) - f(x) = 8x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\iff \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = 8 \quad (\div x^2 ; x \neq 0)$

$\iff g'(x) = 8 + 2\frac{f(x)}{x}$

$\iff g'(x) = 8 + g(x) \iff g$ solution de (E').

ⓑ Nous l'avons déjà montré dans la question précédente : h sol de (E') alors si $f(x) = x h(x)$, on a bien $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ et d'après ce qui précède f solution de (E).

② (E') : $y' = 2y + 8$ est une équation de la forme $y' = ay + b$
les solutions sont donc les f° de la forme $f(x) = Ke^{2x} - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, K Cte

d'après ce qui précède, f solution de (E) $\iff g(x) = \frac{f(x)}{x}$; $x > 0$
est solution de (E')

d'où $\frac{f(x)}{x}$ est de la forme $g(x) = Ke^{2x} - 4$; $x > 0$ K cte,

donc $f(x) = xKe^{2x} - 4x$; $x > 0$ sont les solutions de (E)

③ Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f

$A \in \mathcal{C} \iff f(\ln 2) = 0 \iff \ln 2\, K \times 2^2 - 4\ln 2 = 0$
$\iff K = 1$

la solution cherchée est $f(x) = xe^{2x} - 4x$; $x > 0$

III ① $g(x) = e^x - x - 1$; $x \in \mathbb{R}$

ⓐ g dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivation

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$

et donc $g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ d'où le tableau de variation de g

x		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

et $g(0) = 0$
donc g admet pour minimum 0
c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

(b) $g(x) \geq 0 \iff e^x - x - 1 \geq 0 \iff e^x - x \geq 1 > 0$

d'où f définie sur $\mathbb{R}$

(2)(a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty \implies \lim\limits_{+\infty} f = 0$ par inverse

donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = -1$ et donc $\lim\limits_{-\infty} f = -1$

donc $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

(b) f dérivable d'après les règles de dérivation et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$
$$= \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; $(e^x - x)^2 > 0 \implies$ le signe de f' est celui de $1-x$.

On déduit le tableau de variation de f :

x		1	
f'	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$ 0

(c) T a pour équation :

$T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$\implies T : y = x$

Soit $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{-xe^x + x^2 - x}{e^x - x} = \frac{-x\,g(x)}{e^x - x}$$

Le signe de h est donc celui de $-x$ car $g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

d'où pour $x > 0$, $h(x) < 0 \implies \mathcal{C}$ est en dessous de T

pour $x < 0$ $h(x) > 0 \implies \mathcal{C}$ est au dessus de T

(IV)(a) Soit $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$2iz + 3i = \bar{z} + 1 \iff 2i(x+iy) + 3i = x - iy + 1$

$\iff -2y - x - 1 + i(2x + 3 + y) = 0$

$\iff \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$ (car les parties réelles et imaginaires sont nulles)

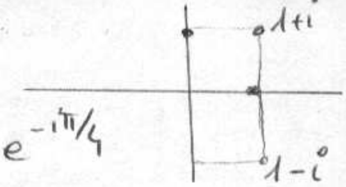
$\iff \begin{cases} 3y = 1 \\ x = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$ donc $S = \left\{-\frac{5}{3} + \frac{i}{3}\right\}$

(b) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta = 8 - 16 = -8 \implies$ on a deux solutions $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}(1+i)$

et $z_2 = \sqrt{2}(1-i)$

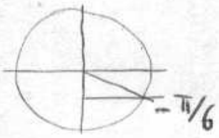
- et $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$; $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$



- d'où les solutions sont $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$; $z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

V (a) $|z_1|^2 = 8 \implies |z_1| = 2\sqrt{2}$

$$\implies z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}$$



(b) $$z_2 = 2 - 2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

(c) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2+2i)}{8} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

(d) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = e^{i\pi/12} = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

donc par identification des partie réelles et imaginaires

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

VI (a) $a = -i e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/2} e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/6}$

$$b = (1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 2^4 (e^{i\pi/3})^4 = 16\, e^{4i\pi/3}.$$