TS6 Devoir N° 8 16/02/2009

I ① $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \dfrac{1-2i-3-2i}{1-2i+3} = \dfrac{-2-4i}{4-2i} = \dfrac{-(2+4i)(4+2i)}{20} = \dfrac{-20i}{20} = -i$

On a donc $z_A - z_I = e^{-i\pi/2}(z_B - z_I)$

donc dans la rotat° de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ B a pour image A

on déduit donc IAB triangle rectangle en I et isocèle.

② C image de I par $h_{(A,2)}$ $\Leftrightarrow$ $z_C = 2(z_I - z_A) + z_A$

$= 2(1-2i-3-2i) + 3+2i$

$= 2(-2-4i) + 3+2i = -1-6i$

$\Rightarrow C(-1-6i)$

③ D image de B par $R_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $\Leftrightarrow$ $z_D = e^{i\pi/2}(z_B - z_A) + z_A$

$= i(-6-2i) + 3+2i = -6i+2+3+2i$

$= -4i+5$ $\Rightarrow D(5-4i)$

④ $\left.\begin{array}{l} z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -6-2i \\ z_{\vec{CD}} = z_D - z_C = 6+2i \end{array}\right\}$ $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ $\Rightarrow$ ABCD parallélogramme

de plus $R_{(A,\pi/2)}(B) = D$ d'où $AB = AD$

et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$

donc ABCD parallélogramme avec 2 côtés de même longueurs consécutifs et un angle droit donc ABCD carré

II ⓐ Soit P_n la ppté $0 < u_n < 1$; Montrons par récurrence que P_n vraie $\forall n$

Etape 1 : $u_0 \in]0,1[$ donc P_0 vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1}

$0 < u_q < 1$ car P_q vraie

$f(0) < u_{q+1} < f(1)$ car $f \nearrow$ sur $[0,1]$ (*)

$0 < u_{q+1} < 1$ d'où P_{q+1} vraie

(*) $f \nearrow$ sur $[0,1]$; en effet, f dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = 2-2x = 2(1-x) \geq 0$ sur $[0,1]$ donc f croissante sur $[0,1]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; P_n vraie ; c'est à dire $0 < u_n < 1$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n$

$= u_n(1-u_n)$ et $u_n \in]0,1[\Rightarrow 1-u_n > 0$

d'où $u_{n+1} - u_n > 0$

$\Rightarrow (u_n)$ croissante

ⓒ (u_n) croissante majorée donc (u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$

ⓓ $\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [0,1] \\ f \text{ continue sur } [0,1] \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{pt fixe}}$ $f(\ell) = \ell$

d'où $\ell = \ell(2-\ell) \iff \ell(1-\ell) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$

$\ell = 0$ à exclure car (u_n) croissante et $u_0 > 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

III 1) Soit P_n la ppté $s_n = 2$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie.

Etape 1 : pour $n=0$; $s_0 = u_0 + v_0 = 2 \implies P_0$ vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$ supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie $\iff s_q = 2$.

$$s_{q+1} = u_{q+1} + v_{q+1} = \frac{3u_q+1+3v_q+1}{4} = \left(3(u_q+v_q)+2\right)\frac{1}{4} = \frac{3s_q+2}{4}$$
$$= 2 \quad (\text{car } s_q = 2)$$

d'où P_{q+1} vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $s_n = 2$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} = \frac{3(v_n-u_n)}{4} = \frac{3}{4} d_n$

d'où (d_n) géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$

on déduit $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3) $$\begin{cases} s_n = v_n + u_n \\ d_n = v_n - u_n \end{cases} \iff \begin{cases} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} \end{cases}$$ (par combinaison)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

et $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4) $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$