TS 27 mars 2009

Devoir N° 10

I - Obligatoire.

① $\displaystyle\int_0^1 2^x 3^{x+1}\,dx = 3\int_0^1 6^x\,dx = 3\int_0^1 e^{x\ln 6}\,dx = 3\left[\frac{1}{\ln 6}e^{x\ln 6}\right]_0^1$

$$= \frac{3}{\ln 6}\left(e^{\ln 6}-1\right) = \frac{15}{\ln 6}.$$

② $\displaystyle g(x) = \int_0^{\ln x} \frac{\sin^2 t}{1-t}\,dt.$

$t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{1-t}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc cette intégrale est définie lorsque l'intervalle de bornes $0, \ln x$ ne contient pas 1.
il faut donc $\ln x < 1$ c'est-à-dire $x < e$. (et $x>0$ pour calculer $\ln x$)

d'où $D_g =]\,0\,;e[$.

Soit F la primitive de $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{1-t}$ sur $]1;+\infty[$

alors $g(x) = [F]_0^{\ln x} = F(\ln x) - F(0)$ $\quad \forall x \in]0;e[$

d'où $g'(x) = \dfrac{1}{x}\times F'(\ln x)$ (car F, $\ln$ dérivables)

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin^2(\ln x)}{1-\ln x}$$

et sur D_g : $x>0$; $\sin^2(\ln x) > 0$ et $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1$
$\iff x < e$
toujours vrai sur D_g

donc finalement $\forall x \in D_g$ $g'(x) > 0$ donc g croissante :

x	0	1	e
$g(x)$		$\nearrow$ 0	

II ① ⓐ

$\displaystyle\int_1^x 2-t\,dt = \left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x = 2x-\frac{x^2}{2}-2+\frac{1}{2}$ $\quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_1^x 2-t\,dt = -\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}$

$\forall t \neq 0$ $\quad 2-t-\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t}(2t-t^2-1)$

$$= \frac{1}{t}\times\left(-(t-1)^2\right) = -\frac{(t-1)^2}{t}$$

$(t-1)^2 \geqslant 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$ pour $t \geqslant 1$ d'où $2-t-\dfrac{1}{t} \leqslant 0$

$\Longrightarrow 2-t \leqslant \dfrac{1}{t}$ $\quad \forall t \geqslant 1$

ⓒ Les fonctions dans l'inégalité qui précède sont continues sur $[1;+\infty[$ donc par intégration de l'inégalité (avec $1 \leqslant x$) on a :

$$\int_1^x 2-t\,dt \leqslant \int_1^x \frac{dt}{t} \iff -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leqslant [\ln t]_1^x \quad \forall x>1$$

Finalement $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leqslant \ln x \ \forall x \geqslant 1.$

② $$\int_1^4 h(x)dx = \int_1^4 -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2-3\times 4+\frac{1}{3}-2+3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{64}{3}+32-12+\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-21+21) = 0$$

l'intégrale est nulle, c'est donc que l'aire de la partie de C_h située audessus de (Ox) est la même que celle située en-dessous.

ⓑ d'après (1.c) $h(x) \leqslant \ln x \quad \forall x \geqslant 1$ donc l'aire de la zone D est (par thm) $\mathcal{A} = \int_1^4 \ln x - h(x)\,dx = \int_1^4 \ln x\,dx - \underbrace{\int_1^4 h(x)dx}_{=0}.$

Soit $u(x) = \ln x$; $v(x) = x \quad \forall x>0.$

alors u, v dérivables et $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = 1$

u, v, u', v' continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par intégration par parties

$$\mathcal{A} = \int_1^4 \ln x\,dx = [x\ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x}\times x\,dx$$

$$= 4\ln 4 - [x]_1^4 = 4\ln 4 - 3 \text{ u.a.}$$

(III) ① $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$; $x>0$

$\forall x>0$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x} \times e$

par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

donc par produit $\lim_{x\to+\infty} f = 0.$

② f dérivable et $\forall x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{1-x} - \sqrt{x}\, e^{1-x} = e^{1-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$$

$$= e^{1-x}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)$$

et $\sqrt{x} > 0$ si $x > 0$ ainsi que $e^{1-x} > 0$.

Donc le signe de f' est celui de $1-2x$.

d'où le tableau de variations de f

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \times e^{1/2} = \sqrt{\tfrac{e}{2}}$$

Ⓑ $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

① $f(t) \geqslant 0 \ \forall t \geqslant 0$

donc u_n est l'aire délimitée par $x = n$; $x = n+1$; (Ox) et C_f.

② $f(t) \geqslant 0 \ \forall t \geqslant 0$; les bornes $n, n+1$ sont dans l'ordre

donc par théorème de positivité, $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$

③ $\forall n \geqslant 1$ $\forall t \in [n, n+1]$, $f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1)$ car f décroissante sur $[1; +\infty[$

les fonctions sont continues, les bornes sont dans l'ordre, on a donc par intégration de l'inégalité $\int_n^{n+1} f(n)\,dt \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt$

d'où $f(n)(n+1-n) \geqslant u_n \geqslant f(n+1)(n+1-n)$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$

④ On a alors pour ~~tout~~ $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(n+2) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$$

et en particulier $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) décroissante.

⑤ (u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et par composée $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$

d'où d'après le thm des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

IV ① $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

$$= \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$$

et $e^{-t}\sqrt{1+t} \geq 0 \ \forall t \geq 0$ d'où par thm de positivité (bornes dans l'ordre

$J_{n+1} - J_n \geq 0 \implies (J_n)$ croissante.

② ⓐ $x \geq 1 \iff \sqrt{x} \geq 1$ (car $\sqrt{.}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$\iff x \geq \sqrt{x}$ ($x\sqrt{x}$ avec $\sqrt{x} > 0$).

donc pour tout $x \geq 1$; $\sqrt{x} \leq x$ et avec $x = t+1$ on a le

résultat : $\sqrt{t+1} \leq t+1 \quad \forall t \geq 1$

ⓑ Les fonctions dans l'inégalité précédente sont continues sur $[1; n]$

donc par intégration de l'inégalité

$$\int_1^n \sqrt{t+1}\, e^{-t}\,dt \leq \int_1^n (1+t)e^{-t}\,dt \iff J_n \leq I_n. \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ⓒ $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt$

soit $u(t) = t+1$, $v(t) = -e^{-t}$ $t \in \mathbb{R}$

alors u, v dérivables et $u'(t) = 1$; $v'(t) = e^{t}$

u, v, u', v' continues donc par intégration par parties :

$$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}(t+1)\right]_1^n + \int_1^n e^{-t}\,dt$$

$$= 2e^{-1} - (n+1)e^{-n} + \left[-e^{-t}\right]_1^n$$

$$= 2e^{-1} - (n+1)e^{-n} + e^{-1} - e^{-n}$$

$$= 3e^{-1} - (n+2)e^{-n}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq 3e^{-1}$ car $-(n+2)e^{-n} < 0$.

d'où $J_n \leq I_n \leq 3e^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ (J_n) majorée.

(c) (J_n) majorée, (J_n) croissante donc (J_n) convergente.

(IV) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(1) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx - \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$

$= \int_1^e x^2(\ln x)^n(\ln x - 1)dx$ par linéarité.

et sur $[1;e]$; $x^2 > 0$; $\ln x > 0$; $\ln x \leq 1$

d'où $\forall x \in [1;e]$ $x^2(\ln x)^n(\ln x - 1) \leq 0$.

donc par intégration de l'inégalité sur $[1;e]$ on obtient $\int_1^e x^2(\ln x)^n(\ln x-1)dx \leq 0$

d'où $I_{n+1} \leq I_n$ $\Rightarrow$ (I_n) décroissante.

(2) d'autre part $\forall x \in [1;e]$, $x^2(\ln x)^n \geq 0$ d'où

par intégration de l'inégalité, $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx \geq 0$.

$\Rightarrow$ (I_n) minorée par 0.

(I_n) décroissante et (I_n) minorée $\Rightarrow$ (I_n) convergente.

(3) $I_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

$u(x) = (\ln x)^{n+1}$; $v(x) = \frac{x^3}{3}$ $\forall x \geq 1$

u, v dérivables ; $u'(x) = (n+1)(\ln x)^{n-1} \times \frac{1}{x}$; $v'(x) = x^2$; u, v, u', v' continues

donc par intégration par parties.

$I_{n+1} = \left[(\ln x)^{n+1}\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e n\frac{(\ln x)^n}{x} \times \frac{x^3}{3}dx$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{(n+1)}{3}I_n$ d'où en effet $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

(4) On a $\frac{3I_{n+1}}{n+1} + I_n = \frac{e^3}{n+1}$ et par passage à la limite, il vient $l = 0$.