29 avril 2009

Devoir de mathématiques - 4 h.

I **A** ① $f(t) = (2-t)e^t$; $t \in \mathbb{R}$.

f dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles de dérivabilité.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = (2-t)e^t - e^t$

$= e^t(1-t) = g(t)$ d'où f primitive de g sur $\mathbb{R}$

On a donc $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt$

$= [f]_0^1 = f(1) - f(0) = e - 2$

② $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$

soit $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}$

u, v dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, $v'(t) = e^t$

u, v, u', v' continues donc par intégration par parties

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} = \int_0^1 u(t)v'(t)dt = \left[e^t(1-t)^{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-t)^n e^t dt$

$= -1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

$= (n+1)u_n - 1$.

B Avec la 1ère calculatrice, on conjecture $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

et avec la seconde on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

C ① $\forall t \in [0,1]$, $(1-t) \geq 0$ donc $(1-t)^n \geq 0 \Rightarrow (1-t)^n e^t \geq 0$

donc les bornes étant dans l'ordre $(0 < 1)$ on a d'après le th. de positivité $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$ c.à.d $u_n \geq 0$.

② ⓐ exp strictement croissante sur $[0,1]$ d'où

$\forall t \in [0,1]$ $e^t \leq e^1$

$\Leftrightarrow (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$ (car $(1-t) \geq 0$) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ⓑ Les fonctions $t \mapsto (1-t)^n e^t$ et $t \mapsto (1-t)^n$ sont continues, les bornes sont dans l'ordre $(0 < 1)$ donc par intégration de l'inégalité on obtient $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e(1-t)^n dt$

$\iff u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$

et $\int_0^1 (1-t)^n dt = -\int_0^1 \underbrace{-(1-t)^n dt}_{\text{de la forme } u'u^n} = -\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc finalement $u_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'où d'après le th des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Ⓓ ① Soit P_n la propriété $v_n = u_n + n!(a+2-e)$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n vraie.

Etape 1

on a $v_1 = 1$ et $u_1 + 1(a+2-e) = e-2+a+2-e$
$= a$

donc P_1 est vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

$v_{q+1} = (q+1)v_q - 1$
$= (q+1)(u_q + q!(a+2-e)) - 1$
$= (q+1)u_q - 1 + (q+1)q!(a+2-e)$
$= u_{q+1} + (q+1)!(a+2-e) \implies P_{q+1}$ vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_n + n!(a+2-e)$

② $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc si $a+2-e > 0$, $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ si $a+2-e < 0$ $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

si $a+2-e = 0$ $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

d'où si $a > e-2$, $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

si $a < e-2$ $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

si $a = e-2$ $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

③ Tout dépend de l'arrondi de $u_1 = e-2$, si l'arrondi est par excès alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et par défaut on a $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

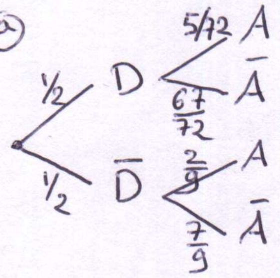
(II) (1) (a) On répète 3 fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli dont l'issue succès est obtenir un 6 avec le dé bien équilibré de probabilité $p = \frac{1}{6}$.

La variable X comptant le nombre de succès suit alors une loi binomiale de paramètres $3 ; \frac{1}{6}$: $X = B(3 ; \frac{1}{6})$

(b) $E(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(c) $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{3 \times 5}{6^3} = \frac{5}{72}$

(2) (a)



Le choix des dès étant équiprobable $P(D) = P(\bar{D}) = \frac{1}{2}$

$P_D(A) = \frac{5}{72}$ d'après (1)(c)

si le dès est le dès truqué ; si on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de 6 alors comme dans (1)(a) $Y = B(3 ; \frac{1}{3})$

donc $P(Y=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$

finalement $P_{\bar{D}}(A) = \frac{2}{9}$

- Choisir le dé bien équilibré et faire exactement deux 6 est $A \cap D$ on a $P(A \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$
- Choisir le dé truqué et faire deux 6 est $A \cap \bar{D}$

on a $P(A \cap \bar{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

(b) $D, \bar{D}$ partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales

on a $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D})$

$= \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{5+16}{144} = \frac{7}{48}$

(c) $P_A(\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{48}{7} \times \frac{1}{9} = \frac{16}{21}$

(3) (a) $\overline{B_n}$: "ne pas faire de 6 parmi les n lancers"

donc $P(\overline{B_n}) = P(\overline{B_n} \cap D) + P(\overline{B_n} \cap \bar{D})$

$= P_D(\overline{B_n}) \times P(D) + P_{\bar{D}}(\overline{B_n}) \times P(\bar{D})$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

donc $P(B_n) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$; $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} p(B_n) =$

En jouant un très grand nombre de fois on est presque certain de faire au moins un 6

III ① ⓐ Voir dessin

ⓑ $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{2+2i}{-2+2i} = \dfrac{-i(-2+2i)}{-2+2i} = -i$

d'où $z_A - z_B = e^{-i\pi/2}(z_C - z_B)$

donc dans la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre B, C a pour image A

donc ABC isocèle rectangle en B.

ⓒ $OA = |z_A| = \sqrt{10}$
$OB = |z_B| = \sqrt{10}$ d'où $A, B \in \mathcal{C}(O, \sqrt{10})$

② ⓐ $r = R_{(M, +\frac{\pi}{2})}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\pi/2}(z - z_M) + z_M$

d'où $z' = i(z - m) + m \iff z' = iz + m(1-i)$

ⓑ on déduit $n = i(a-m) + m$ car $R(A) = N$

$\iff n = i(3 - i - m) + m \iff n = m(1-i) + 1 + 3i$

③ $q = \dfrac{n+a}{2} = \dfrac{1}{2}(m(1-i) + 1 + 3i + 3 - i) = \dfrac{m(1-i)}{2} + 2 + i$

④ ⓐ $M \in \Gamma \iff |z_M| = \sqrt{10} \iff m = \sqrt{10}\,e^{i\theta}$

ⓑ $|q - 2 - i| = \left|\dfrac{m(1-i)}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}|1-i|$ $\qquad |1-i| = \sqrt{2}$

$= \dfrac{\sqrt{10}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Soit $\Omega(2+i)$

Nous avons donc $\Omega Q = |q - 2 - i| = \sqrt{5} \Rightarrow Q \in \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{5})$

Montrons que $\Gamma' = \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{5})$

d'après ③ $q = z_\Omega + e^{i\theta} \cdot e^{-i\pi/4} \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\iff q = z_\Omega + \sqrt{5}e^{i\theta}e^{-i\pi/4}$; $\theta \in \mathbb{R}$

Cette dernière équation est l'équation paramétrique d'un cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$ d'où

$\Gamma' = \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{5})$

avec $\Omega(2+i)$

IV A 1 (t_n) suite de (E) $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} - t_n = 0{,}24\, t_{n-1}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda^{n+1} - \lambda^{n} = 0{,}24\, \lambda^{n-1}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 0{,}24) = 0$

$\iff \lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$ car $\lambda \neq 0$.

$\Delta = 1 + 4 \times 0{,}24 = 1{,}96$

d'où les solutions de $\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$ sont $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{1{,}96}}{2} = \dfrac{2{,}4}{2} = 1{,}2$

et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{1{,}96}}{2} = -0{,}2$

Finalement les suites $\left((1{,}2)^n\right)$ et $\left((-0{,}2)^n\right)$ sont des suites de (E).

2 $u_n = \alpha(1{,}2)^n + \beta(-0{,}2)^n$

$u_0 = 6\ ;\ u_1 = 6{,}6 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha \times 1{,}2 - \beta \times 0{,}2 = 6{,}6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \beta \times 1{,}4 = 0{,}6 \end{cases}$ $1{,}2L_1 - L_2$

$\iff \begin{cases} \beta = \frac{3}{7} \\ \alpha = 6 - \beta = \frac{39}{7} \end{cases}$

on a alors $u_n = \frac{39}{7}(1{,}2)^n + \frac{3}{7}(-0{,}2)^n$ $n \in \mathbb{N}$.

3 $|-0{,}2| < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}2)^n = 0$

$1{,}2 > 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} (1{,}2)^n = +\infty$ d'où d'après les règles sur les limites on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B 1 a $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.

f polynôme $\Rightarrow f$ dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1x$

donc $f'(x) > 0 \iff 1{,}4 > 0{,}1x$

$\iff x < 14$

donc en particulier f croissante sur $[0,8]$ car $[0,8] \subset]-\infty ; 14[$

b $v_0 = 6\ ;\ v_1 = 1{,}4v_0 - 0{,}05 \times v_0^2$
$= 6{,}6$

Soit P_n la propriété $0 < v_n < v_{n+1} \leq 8$; $n \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie

Etape 1: $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 8$ donc P_0 vraie

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow 0 \leq v_q < v_{q+1} \leq 8 \Rightarrow f(0) \leq f(v_q) < f(v_{q+1}) < f(8)$ car $f \nearrow$ sur [

$\Rightarrow 0 \leq v_{q+1} < v_{q+1} \leq 8$

donc P_{q+1} vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$

2 On déduit que (v_n) est croissante et majorée par 8 donc (v_n) est convergente vers l

$v_{n+1} = f(v_n)$
(v_n) converge vers $\ell \in [0,8]$
f continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ d'après le thm du point fixe $f(\ell) = \ell \iff 1{,}4\ell - 0{,}05\ell^2 = \ell$

$\iff \ell(0{,}4 - 0{,}05\ell) = 0 \iff \ell = 0$ impossible car $(v_n) \nearrow$

ou $\ell = \frac{0{,}4}{0{,}05} = 8$ d'où $\ell = 8$

III Spécialité.

I $z' = az + b$; $a \neq 1$.

$\Omega(\omega)$ centre de la similitude $\Leftrightarrow$ Ω fixe $\Leftrightarrow$ $\omega = a\omega + b$

$\Leftrightarrow \omega = \dfrac{b}{1-a}$

Le centre de la similitude est $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$.

II ① g a pour écriture complexe $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$.

g similitude directe donc d'après I g a pour centre le point Ω d'affixe

$$\omega = \frac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}} = 2\frac{(i\sqrt{2}-1)}{1-i\sqrt{2}} = -2.$$

le rapport de g est $|i\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ et l'angle vaut $\arg(i\sqrt{2}) = +\frac{\pi}{2}$ (2π).

② Soit s la réflexion d'axe (Ox) ; s a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.

L'écriture complexe de $g \circ s$ est donc $z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$

d'où $f = g \circ s$.

III ① f a pour écriture complexe $z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$.

$\Omega(\omega)$ invariant par f $\Leftrightarrow$ $\omega = i\sqrt{2}\bar{\omega} + 2i\sqrt{2} - 2$

$\Leftrightarrow x + iy = i\sqrt{2}(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2$ avec $\omega = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x + iy = y - 2 + i(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \end{cases}$ par identification des parties réelles et imaginaires

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ y(1-\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$ $(\sqrt{2}L_1 + L_2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

d'où $\Omega(-2)$ est l'unique point invariant de f

② $\mathcal{D} : y = x + 2$; Soit $N \in \mathcal{D}$ alors N a pour affixe $x + i(x+2)$

donc $f(N)$ a pour affixe $z' = i\sqrt{2}(x - i(x+2)) + 2i\sqrt{2} - 2$

$\Leftrightarrow z' = (x+2)\sqrt{2} - 2 + i(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow z' = (x+2)\sqrt{2} - 2 + i\sqrt{2}(x+2)$

donc $z' = X + i(X+2)$ avec $X = (x+2)\sqrt{2}$ donc $f(N) \in \mathcal{D}$.

③ $\Omega(-2) \in \mathcal{D}$ et $B(2i) \in \mathcal{D}$

σ réflexion a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$

Ω et B invariant $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = a(-2) + b \\ 2i = -2ia + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2a + b \\ 2i + 2 = a(2 - 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2i+2}{2-2i} = i \\ b = -2 + 2i \end{cases}$

donc σ a pour écriture complexe $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$

ⓑ $h = f \circ \sigma$.

f a pour écriture complexe $z' = i\sqrt{2}\,\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$

σ a - - - - - - - - - - - - - - - $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$

donc h a pour écriture complexe $z' = i\sqrt{2}\left(\overline{i\bar{z} - 2 + 2i}\right) + 2i\sqrt{2} - 2$

$$\Leftrightarrow z' = i\sqrt{2}(-iz - 2 - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow z' = \sqrt{2}z - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$$

ⓒ h est une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \arg(\sqrt{2}) = 0$
de plus Ω fixe par σ et par f donc Ω fixe par h.
Finalement h est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$

④ On a $h = f \circ \sigma \Rightarrow h \circ \sigma = f \circ \sigma \circ \sigma$

$$\Leftrightarrow h \circ \sigma = f \circ id_P \Leftrightarrow f = h \circ \sigma$$

donc f composée de la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ suivie de l'homothétie h