TS 6 Devoir N° 13 18 mai 2009

I ① ⓐ $A(3,2,6)$; $2\times 3+2-2\times 6+4=0 \Rightarrow A\in\mathcal{P}$

$B(1,2,4)$; $2\times 1+2-2\times 4+4=0 \Rightarrow B\in\mathcal{P}$

$C(4,-2,5)$; $2\times 4-2+2\times 5+4=0 \Rightarrow C\in\mathcal{P}$

ⓐ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ clairement non colinéaires (une coordonnée nulle et pas l'autre)

donc A,B,C définissent un plan $\Rightarrow (ABC)=\mathcal{P}$.

② ⓐ $\vec{AB}.\vec{AC}=-2+2 \Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{AC} \Rightarrow ABC$ rectangle en A.

ⓑ $\mathcal{P}: 2x+y-2z+4=0 \longrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Δ orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par $O \Rightarrow \vec{n}$ vecteur directeur de Δ donc

Δ a pour équations $\Delta : \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$

ⓒ $OK=\text{dist}(O,\mathcal{P})=$

$$=\frac{4}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{4}{3} \quad \text{(d'après le cours)}$$

ⓓ $\text{vol}(OABC)=\frac{1}{3}$ base $\times$ hauteur. $(OK)\perp\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}=(ABC) \Rightarrow [OK]$ hauteur de $OABC$.

ABC a pour surface $\frac{AB.AC}{2}$ car ABC rectangle en A.

d'où $\text{vol}(OABC)=\frac{OK.AB.AC}{6}$ et $AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

d'où $\text{vol}(OABC)=\frac{4}{3}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}.\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$.

③ ⓐ La somme des poids vaut $6\neq 0 \Rightarrow$ le système admet un barycentre.

ⓑ I centre de gravité de $ABC \Rightarrow I$ barycentre de $(A,1);(B,1);(C,1)$.

donc par associativité du centre de gravité G barycentre de $\{(O,3);(I;3)\}$

d'où G isobarycentre de O et $I \Rightarrow G$ milieu de $[OI]$ ~~$\Rightarrow G,O,I$ alignés~~

ⓒ G milieu de $[OI] \Rightarrow G\left(\frac{x_I}{2};\frac{y_I}{2},\frac{z_I}{2}\right)$

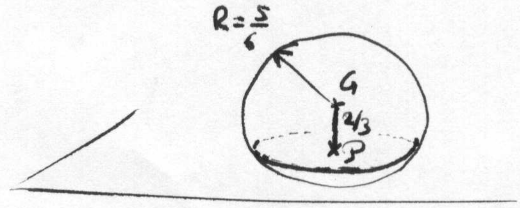
et I isobarycentre de $A,B,C \Rightarrow I\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3};5\right)$ d'où $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$

et donc d'après le cours $\text{dist}(G,\mathcal{P})=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{3}=\frac{2}{3}$

④ D'après la ppté de réduction vectorielle $\forall M,\ 3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 6\vec{MG}$.

d'où $M \in \Gamma \iff 6MG = 5 \iff MG = \frac{5}{6}$

d'où Γ sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.



$dist(G, P) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

donc l'intersection de P et de la sphère S est un cercle.

II ① ⓑ (d'après le cours)

② ⓐ (résoudre $e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$)

③ ⓐ on a $p([0,1]) = 0,18 \iff 1 - e^{-\lambda} = 0,18$

$\iff e^{-\lambda} = 0,82 \iff -\lambda = \ln(0,82) = \ln\frac{82}{100} = \ln\left(\frac{41}{50}\right)$

$\Rightarrow \lambda = \ln\left(\frac{50}{41}\right)$

(car $\ln\frac{1}{X} = -\ln X$)

④ ⓐ $p_{[2,+\infty[}([3,+\infty[) = p([1,+\infty[)$ (cours)

⑤ ⓑ $p([3,+\infty[) = e^{-\lambda 3} = 0,5488\ldots$

⑥ ⓒ X loi de Binomiale ; $X = B(10 ; p([3,+\infty[))$

$\Rightarrow P(X=4) = \binom{10}{4}(e^{-\lambda 3})^4 (1 - e^{-\lambda 3})^6 \simeq 0,8022$