Devoir Mathématiques N^o 10 (1h)

0 Nom et prénom :

1 **Partie A**

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur -6
Pour k allant de 1 à N (inclus)

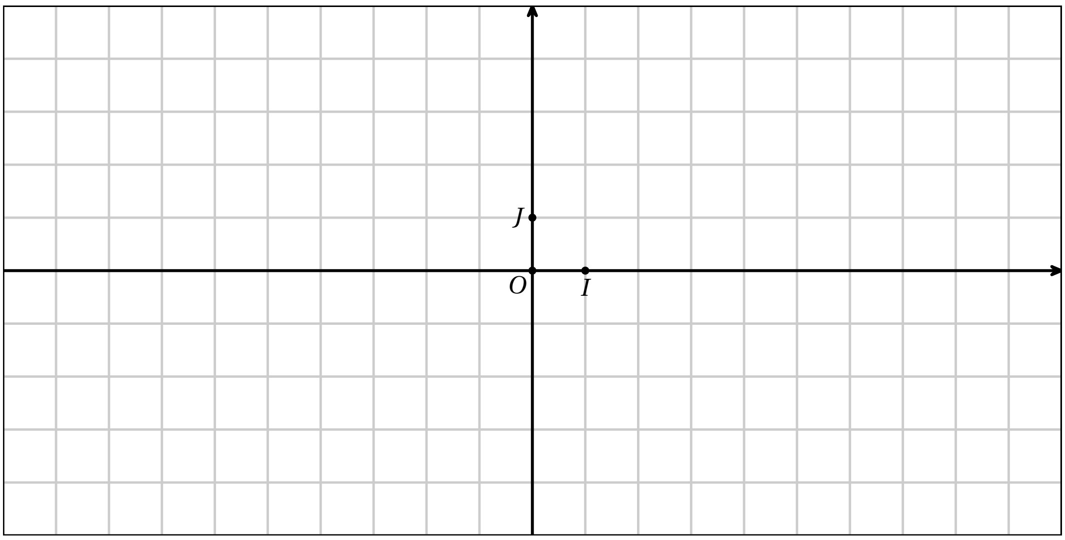
Affecter à U la valeur $\frac{1}{4}U+3$
Afficher U
Fin pour

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=2$? (justifier sommairement)

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=-6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1. Sur le graphique ci-joint, représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. En déduire une conjecture sur la monotonie de (u_n) et sur son éventuelle limite.
2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par $v_n=u_n-4$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire celle de (u_n).
   pour tout entier naturel n.
   c) En déduire la limite de (u_n).



2 Une suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est arithmétique.
2. Déterminer alors (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

3 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère les suites $d_n = v_n - u_n$ et $s_n = v_n + u_n$.
   a) Montrer que (d_n) est geómétrique et déterminer d_n en fonction de n.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Que pouvez vous en déduire pour (s_n) ?
3. En déduire l'expression de (v_n) et (u_n) en fonction de n.