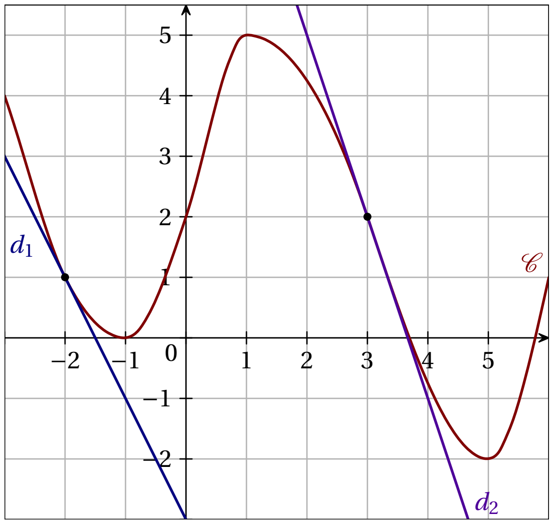
DS n° 4 : Test dérivation (30 min)

I **(4 points)** La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;6]$. Les droites d_1 et d_2 sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -2 et 3.



1. Déterminer, par lecture graphique, $f(-2)$, $f(3)$, $f'(-2)$ et $f'(3)$.

2. On admet que $f'(0) = 3$. Illustrer cette donnée sur la figure.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$. Expliquer.

4. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $[-3\,;6]$.

II **(4 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

1. Soit h un réel non nul.
   Calculer et simplifier : $t(h) = \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$
2. Déterminer la limite de $t(h)$ lorsque h tend vers 0.
3. Que peut-on conclure ?

III **(2 points)**

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 3x^2 - 4x + 7$$

On appelle $\mathscr{C}_h$ la représentation graphique de h dans un repère et T_2 la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 2.
On *admet* que $h'(2) = 8$.

1. Déterminer l'équation réduite de T_2.
2. Le point $H\,(11,7\,;88,8)$ appartient-il à T_2 ?

IV✳ Soit f la fonction valeur absolue. Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité de f en 0.

1. A l'aide d'un graphique, conjecturez la dérivabilité de f en 0.
2. Soit t le taux d'accroissement de f en 0.
   a) Déterminez $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} t(h)$.
   b) Déterminez $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} t(h)$.
3. Que peut-on en déduire quant à la dérivabilité de h en 0 ?
4. Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

V✳

1. Etablir l'identité pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-2}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = x^n$. Démontrez que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Dans cette question on a $n \in \mathbb{Z}_-$. En utilisant la dérivée de $\dfrac{1}{v}$, montrer que f est dérivable lorsque $x \neq 0$ et que la formule est encore valable : $f'(x) = nx^{n-1}$.