DS N° 8 : Suites (1h30)

I **(6 points)** La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

Correction :

Chaque année, la population diminue de 10%, donc elle est multipliée par $1-0,1 = 0,9$. À cette diminution s'ajoutent 100 individus réintroduits en fin d'année. Ainsi, au début de l'année suivante (u_{n+1}), on a :

$$u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 100$$

2. Calculer u_1 puis u_2.

Correction :

$$u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$$
$$u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= (0,9u_n + 100) - 1000 \\ &= 0,9u_n - 900 \\ &= 0,9(u_n - 1000) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ avec
$v_0 = u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\,(1 + 0,9^n)$.

Correction :

Par propriété des suites géométriques, $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n = 1000 \times 0,9^n$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 1000 \\ &= 1000 \times 0,9^n + 1000 \\ &= 1000(0,9^n + 1) \\ &= 1000(1 + 0,9^n) \end{aligned}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

Correction :

On a $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$. Alors par somme et produit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000(1 + 0) = 1000$$

Interprétation : À long terme, la population se stabilisera autour de 1000 individus.

II **(3 points)** On empile des allumettes de la façon indiquée sur la figure.
On note v_n le nombre d'allumettes sur la $n$ème rangée. On a donc $v_1 = 3$.

1. Établir une relation de récurrence et déterminer la nature de la suite (v_n).

Correction :

En observant la figure :

- Rangée 1 : 3 allumettes
- Rangée 2 : 7 allumettes
- Rangée 3 : 9 allumettes

On constate qu'on ajoute 4 allumettes à chaque nouvelle rangée. Donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_{n+1} = v_n + 4$$

(v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ avec $v_1 = 3$.

2. Écrire v_n en fonction de n.

Correction :

Pour une suite arithmétique, pour tout $n \geq 1$: $v_n = v_1 + (n-1)r$

$$v_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$$

3. Quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour faire un empilement de 40 rangées ?

Correction :

Le nombre total d'allumettes pour n rangées est :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

et (v_n) est une suite arithmétique donc par théorème :

$$S_n = \frac{1}{2}(v_1 + v_n) \times n$$

Pour $n = 40$:

$$v_{40} = 4 \times 40 - 1 = 159$$

$$S_{40} = \frac{1}{2}(3 + 159) \times 40 = \frac{162 \times 40}{2} = 162 \times 20 = 3240$$

Il faut 3240 allumettes.

III **(3 points)** Une suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est arithmétique.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $u_n \neq 0$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n} \\ &= 2 + \frac{1}{u_n} \\ &= v_n + 2 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ avec $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

2. Déterminer alors (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

Correction :

Par propriété des suites arithmétiques : $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$. Donc :

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+2n}$$

IV **(2 points)** On définit pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

C'est-à-dire

$$S_n = 1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

1. Donner une expression de S_n en fonction de n.

Correction :

C'est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{4}{5}$.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = 5\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]$$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Correction :

Comme $-1 < \frac{4}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = 0$. Donc :

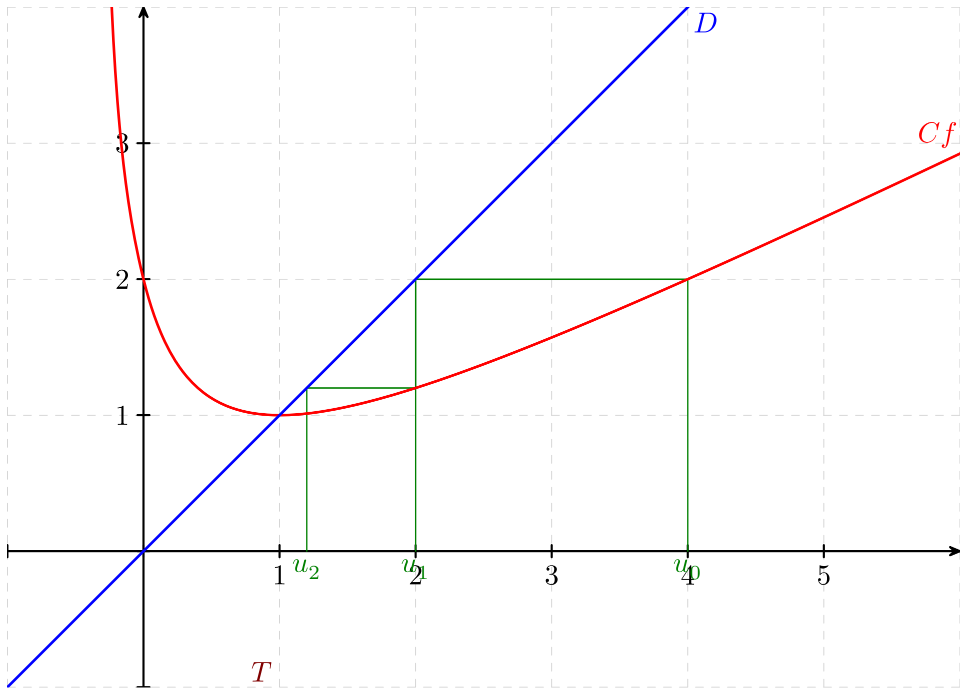
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 5(1-0) = 5$$

V **(4 points)** On considère la fonction f définie pour $x > -\dfrac{1}{2}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$$

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Sur la figure, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, représentez sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 et u_2.



Correction :

Méthode graphique :

- $u_0 = 4$ sur l'axe des abscisses. Alors $u_1 = f(u_0)$, et on reporte sur l'axe des abscisses avec $\mathcal{D}$.
- Même méthode pour u_2 à partir de u_1.

(b) Quelle conjecture pouvez faire sur les variations et la limite de la suite (u_n) ?

Correction :

Conjecture : La suite (u_n) semble décroissante et converge vers une limite ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (environ 1).

2. (a) Pour $x > -\dfrac{1}{2}$, déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

Correction :

On utilise la formule de dérivée d'un quotient : pour $x > -\dfrac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2+2) \times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$

(b) Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$ puis la tracer sur le graphique.

Correction :

On a $\mathcal{T} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$
avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = -4$
Donc

$$\mathcal{T} : y = -4x + 2$$