

## DS N°8 : Suites (h30)

---

**I** (6 points) La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 20 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  représente l'effectif de la population au début de l'année  $2020 + n$ .

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi  $u_0 = 2 000$ .

- Justifier que la suite  $(u_n)$  vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 100.$$

**Correction :**

Chaque année, la population diminue de 20%, donc elle est multipliée par  $1 - 0,2 = 0,8$ . À cette diminution s'ajoutent 100 individus réintroduits en fin d'année. Ainsi, au début de l'année suivante  $(u_{n+1})$ , on a :

$$u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 100$$

- Calculer  $u_1$  puis  $u_2$ .

**Correction :**

$$u_1 = 0,8 \times 2000 + 100 = 1600 + 100 = 1700$$

$$u_2 = 0,8 \times 1700 + 100 = 1360 + 100 = 1460$$

- On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 500$ .

- Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.

**Correction :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= (0,8u_n + 100) - 500 \\ &= 0,8u_n - 400 \\ &= 0,8(u_n - 500) \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,8$  avec  
 $v_0 = u_0 - 500 = 2000 - 500 = 1500$ .

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 500(1 + 3 \times 0,8^n)$ .

**Correction :**

$(v_n)$  est géométrique donc par propriété pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1500 \times 0,8^n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 500 \\ &= 1500 \times 0,8^n + 500 \\ &= 500 \times (3 \times 0,8^n + 1) \\ &= 500(1 + 3 \times 0,8^n) \end{aligned}$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

**Correction :**

On a  $-1 < 0,8 < 1$ , donc par théorème  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ .  
 Alors par produit et somme on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 500(1 + 3 \times 0) = 500$$

Interprétation : À long terme, la population se stabilisera autour de 500 individus malgré les réintroductions annuelles de 100 individus.

- II (3 points)** On empile des allumettes de la façon indiquée sur la figure.  
 On note  $v_n$  le nombre d'allumettes sur la  $n$ ème rangée. On a donc  $v_1 = 3$ .

1. Établir une relation de récurrence et déterminer la nature de la suite  $(v_n)$ .

**Correction :**

En observant la figure :

- Rangée 1 : 3 allumettes
- Rangée 2 : 7 allumettes
- Rangée 3 : 9 allumettes

On constate qu'on ajoute 4 allumettes à chaque nouvelle rangée. Donc pour tout  $n \geq 1$  :

$$v_{n+1} = v_n + 4$$

$(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 4$  avec  $v_1 = 3$ .

2. Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

Pour une suite arithmétique, pour tout  $n \geq 1$  :  $v_n = v_1 + (n - 1)r$

$$v_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

3. Quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour faire un empilement de 40 rangées ?

**Correction :**

Le nombre total d'allumettes pour  $n$  rangées est :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

et  $(v_n)$  est une suite arithmétique donc par théorème :

$$S_n = \frac{1}{2}(v_1 + v_n) \times n$$

Pour  $n = 50$  :

$$v_{50} = 4 \times 50 - 1 = 199$$

$$S_{50} = \frac{1}{2}(3 + 199) \times 50 = \frac{202 \times 50}{2} = \frac{20200}{4} = 5050$$

Il faut 5050 allumettes.

**(III) (3 points)** Une suite  $(u_n)$  est définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{u_n}$  est arithmétique.

**Correction :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  où  $u_n \neq 0$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{3u_n + 1}} \\ &= \frac{3u_n + 1}{u_n} \\ &= 3 + \frac{1}{u_n} \\ &= v_n + 3 \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $r = 3$  et de premier terme  $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$ .

2. Déterminer alors  $(v_n)$  puis  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

Par propriété des suites arithmétiques :  $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + 3n$ . Donc :

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n} = \frac{1}{\frac{1+6n}{2}} = \frac{2}{1+6n}$$

- (IV) (2 points)** On définit pour  $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

C'est-à-dire

$$S_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

1. Donner une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

On a la somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $q = \frac{3}{4}$ , donc par théorème :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Correction :**

Comme  $-1 < \frac{3}{4} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ . Donc :

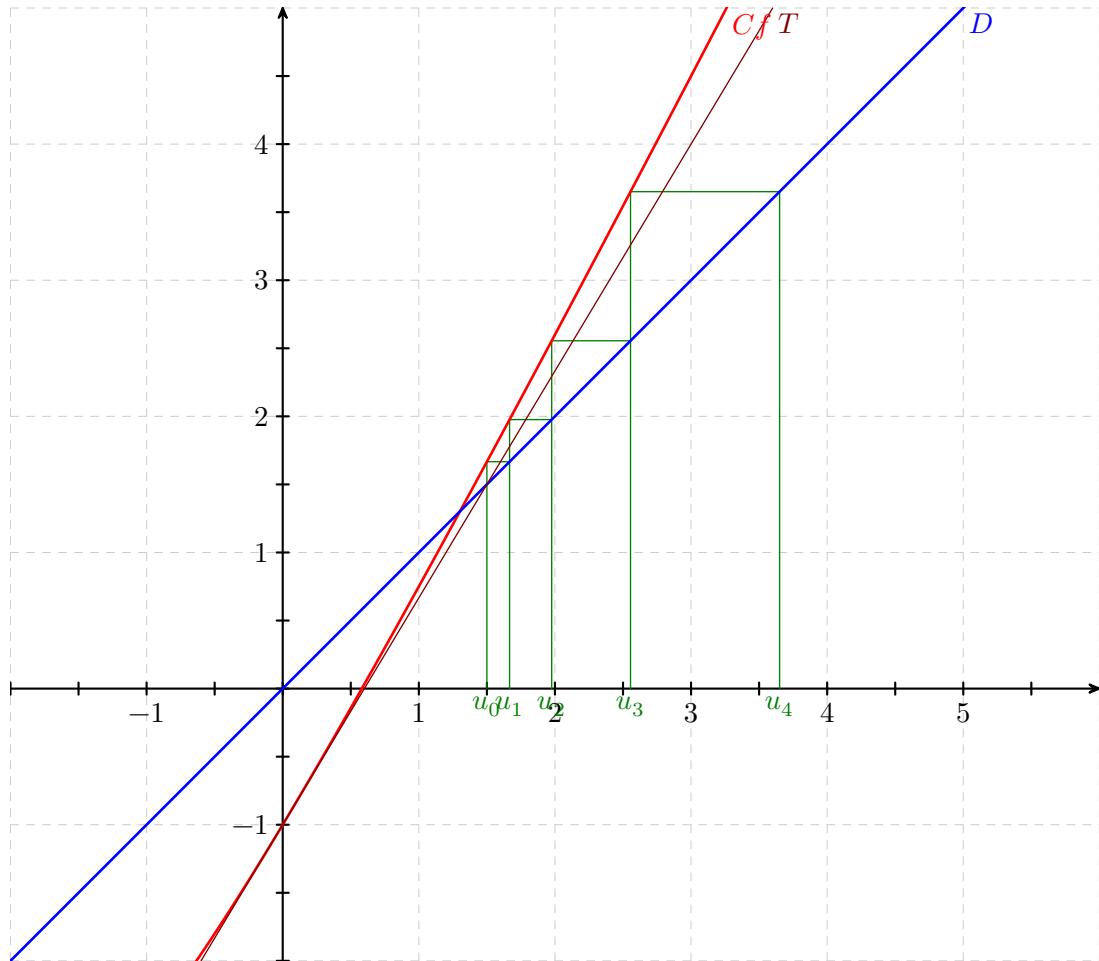
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4(1 - 0) = 4$$

- (V) (4 points)** On considère la fonction  $f$  définie pour  $x > -3$  par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 3}{x + 3}$$

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- (a) Sur la figure, en utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ , représentez sur l'axe des abscisses les termes  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .  
(b) Quelle conjecture pouvez faire sur les variations et la limite de la suite  $(u_n)$ ?



**Correction :**

Méthode graphique :

- $u_0 = 1,5$  sur l'axe des abscisses. Alors  $u_1 = f(u_0)$ , et on reporte sur l'axe des abscisses avec  $\mathcal{D}$ .
- Même méthode pour  $u_2$  à partir de  $u_1$ .

Conjecture : La suite  $(u_n)$  semble croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2. (a) Pour  $x > -3$ , déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

**Correction :**

On utilise la formule de dérivée d'un quotient : Pour  $x > -3$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+4)(x+3) - (2x^2 + 4x - 3) \times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 12x + 4x + 12 - 2x^2 - 4x + 3}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 12x + 15}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

- (b) Soit  $\mathcal{T}$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0. Déterminer l'équation de  $\mathcal{T}$  puis la tracer sur le graphique.

**Correction :**

On a  $\mathcal{T} : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

avec  $f(0) = \frac{-3}{3} = -1$  et  $f'(0) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

Donc

$$\mathcal{T} : y = \frac{5}{3}x - 1$$