

## DS N° 10 : Suites (4h30)

### I (4 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} &= \left(\frac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite  $(v_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = (n+1)u_n$ .

	A	B	C
1	$n$	$u_n$	$v_n$
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , arrondies au cent-millième. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de  $(u_n)$  ?

#### Correction :

Pour passer d'un terme au suivant, on utilise la formule de récurrence  $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right) u_n$ . En notant que la valeur de  $n$  est en colonne A, la formule en B3 (qui donnera  $u_1$ ) doit être :

$$= \left(\frac{A3}{2 * A2 + 4}\right) * B2$$

ou toute autre forme équivalente utilisant les références aux cellules A2, A3 et B2.

2. (a) Conjecturer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

#### Correction :

D'après le tableau, on a :  $v_0 = 1$ ,  $v_1 = 0,5$ ,  $v_2 = 0,25$ ,  $v_3 = 0,125$ ,  $v_4 = 0,0625$ . On peut conjecturer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et donc que

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- (b) Démontrer cette conjecture.

**Correction :**

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= (n+2)u_{n+1} \\
 &= (n+2) \times \frac{n+1}{2n+4} u_n \\
 &= (n+2) \times \frac{n+1}{2(n+2)} u_n \\
 &= \frac{n+1}{2} u_n \\
 &= \frac{1}{2} (n+1) u_n \\
 &= \frac{1}{2} v_n.
 \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est bien géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = (0+1)u_0 = 1$ . Par propriété, on a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Correction :**

$$\text{On a } u_n = \frac{v_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{On a } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc par propriété } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Alors par produit de limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

**(II)** (3 points) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Montrer que pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

**Correction :**

Pour  $k \geq 1$ , on met l'expression de droite au même dénominateur :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

L'égalité est donc vérifiée.

2. En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

On utilise la relation précédente pour chaque terme de la somme. Il s'agit d'une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Tous les termes se simplifient à l'exception du premier (1) et du dernier ( $-\frac{1}{n+1}$ ). Ainsi :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. Déterminez  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Correction :**

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , donc par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

**III (13 points)**

On considère la suite de nombres réels  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer  $u_2$ .

**Correction :**

Pour  $n = 0$ , la relation de récurrence donne :

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi  $u_2 = \frac{3}{4}$ .

2. On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

(a) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

**Correction :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left( u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2} \left( u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ . On a de plus  $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

(b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

Par propriété, pour tout  $n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. On définit la suite  $(w_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

(a) En utilisant l'égalité  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ , exprimer  $w_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $v_n$ .

**Correction :**

On a  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ . Donc :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \\ &= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} \\ &= \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} \\ &= 2 + \frac{u_n}{v_n}. \end{aligned}$$

(b) En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = w_n + 2$ .

**Correction :**

On a  $\frac{u_n}{v_n} = w_n$ , donc l'expression précédente devient :

$$w_{n+1} = w_n + 2.$$

(c) Quelle est la nature de  $(w_n)$ ? Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

**Correction :**

La relation  $w_{n+1} = w_n + 2$  montre que  $(w_n)$  est une suite arithmétique de raison 2. Son premier terme est  $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$ . Par propriété, pour tout  $n \in \mathbb{N} : w_n = w_0 + n \times 2$ .

$$w_n = -1 + 2n$$

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

**Correction :**

On a  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ . Donc  $u_n = w_n \times v_n$ .

$$\begin{aligned}u_n &= (2n - 1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2n - 1}{2^n}.\end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule demandée.