

## D.S.N° 10 : Suites (4h30)

### I (4 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} &= \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n. \end{cases}$$

On définit la suite  $(v_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = (n+1)u_n$ .

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , arrondies au cent-millième.

Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de  $(u_n)$  ?

2. (a) Conjecturer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
 (b) Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

	A	B	C
1	$n$	$u_n$	$v_n$
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

### II (3 points) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Montrer que pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminez  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### III (13 points)

On considère la suite de nombres réels  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer  $u_2$ .
2. On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- (a) Montrer que  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .  
 (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3. On définit la suite  $(w_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- (a) En utilisant l'égalité  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ , exprimer  $w_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $v_n$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = w_n + 2$ .  
 (c) Quelle est la nature de  $(w_n)$  ? Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$