

DS N° 11 : Exponentielle 1 (Ch.30)

I Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

$$a_1(x) = \frac{(e^x)^3}{e^{2x}}$$

$$a_2(x) = e^x (e^x + e^{-x})$$

$$a_3(x) = (e^x)^5 (e^{-2x})^2$$

$$a_4(x) = e^{-3x+1} (e^x)^3$$

$$a_5(x) = \frac{e^{-x+2} e^{-2x-1}}{e^{3x+2} e^{-x-1}}$$

$$a_6(x) = \frac{16e^{3+2x}}{-12e^{2x+5}}$$

Correction :

$$\bullet a_1(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x.$$

$$\bullet a_2(x) = e^{2x} + e^x e^{-x} = e^{2x} + 1.$$

$$\bullet a_3(x) = e^{5x} \times e^{-4x} = e^x.$$

$$\bullet a_4(x) = e^{-3x+1} \times e^{3x} = e^{-3x+1+3x} = e^1 = e.$$

$$\bullet a_5(x) = \frac{e^{-x+2-2x-1}}{e^{3x+2-x-1}} = \frac{e^{-3x+1}}{e^{2x+1}} = e^{-3x+1-2x-1} = e^{-5x}.$$

$$\bullet a_6(x) = \frac{16}{-12} e^{3+2x-2x-5} = -\frac{4}{3} e^{-2} = -\frac{4}{3e^2}.$$

II Calculez les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$f_2(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f_3(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Correction :

$$\bullet f_1(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\bullet f_2(x) = x^3 e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 3x^2 e^{-x} + x^3 (-e^{-x}) \\ &= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} \\ &= x^2 e^{-x} (3 - x) \end{aligned}$$

$$\bullet f_3(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 2x e^{\frac{1}{x}} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= 2x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \\ &= (2x - 1) e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

III Résoudre les équations et inéquations suivantes

$$(E_1) : e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{e} = 0$$

$$(E_2) : \frac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$$

$$(E_3) : e^x \leq \frac{1}{e^x}$$

$$(E_4) : e^{2x+3} < -e^{5x}$$

Correction :

•

$$(E_1) \iff e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{e} = 0$$

$$\iff e^{\frac{x}{2}} = e^{-1}$$

$$\iff \frac{x}{2} = -1 \quad \text{Car exp st. croissante}$$

$$\iff x = -2$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{-2\}$.

•

$$(E_2) \iff \frac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$$

$$\iff e^{4x+1-2x-3} = e^1$$

$$\iff e^{2x-2} = e^1$$

$$\iff 2x - 2 = 1 \iff 2x = 3 \quad \text{Car exp st. croissante}$$

$$\iff x = \frac{3}{2}$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

•

$$(E_3) \iff e^x \leq \frac{1}{e^x}$$

$$\iff e^x \leq e^{-x}$$

$$\iff x \leq -x \quad \text{Car exp st. croissante}$$

$$\iff 2x \leq 0$$

$$\iff x \leq 0$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]-\infty; 0]$.

• $(E_4) : e^{2x+3} < -e^{5x}$.

Comme $e^{2x+3} > 0$ et $-e^{5x} < 0$,

alors l'inégalité $e^{2x+3} < -e^{5x}$ est impossible

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \emptyset$.

IV Déterminer le signe des expressions suivantes :

$$f_1(x) = e^{2x} - 3xe^{2x}$$

$$f_2(x) = x^3 e^{-3x}$$

Correction :

- $f_1(x) = e^{2x} - 3xe^{2x} = e^{2x}(1 - 3x)$. Sur \mathbb{R} :
 $e^{2x} > 0$, donc le signe de $f_1(x)$ est celui de $1 - 3x$ qui est affine décroissante et s'annule en $\frac{1}{3}$.

Ainsi on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$		+	-

- $f_2(x) = x^3 e^{-3x}$.

Sur \mathbb{R} :

$e^{-3x} > 0$ donc le signe de $f_2(x)$ est celui de x^3 qui est une fonction de référence.

Ainsi on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-	+