DS N° 11 : Exponentielle 1 (0h30)

I Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

$$a_1(x) = \frac{\left(e^{2x}\right)^4}{e^{5x}}$$
$$a_2(x) = e^{2x}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$$
$$a_3(x) = \left(e^{-x}\right)^4\left(e^{3x}\right)^2$$
$$a_4(x) = e^{4x-2}\left(e^{-x}\right)^3$$
$$a_5(x) = \frac{e^{2x-3}e^{-3x+1}}{e^{4x-2}e^{-x+2}}$$
$$a_6(x) = \frac{24e^{5-3x}}{-18e^{2x-1}}$$

Correction :

- $a_1(x) = \frac{e^{8x}}{e^{5x}} = e^{8x-5x} = e^{3x}$.
- $a_2(x) = e^{2x} \times e^{3x} - e^{2x} \times e^{-x} = e^{5x} - e^{x}$.
- $a_3(x) = e^{-4x} \times e^{6x} = e^{2x}$.
- $a_4(x) = e^{4x-2} \times e^{-3x} = e^{4x-2-3x} = e^{x-2}$.
- $a_5(x) = \frac{e^{2x-3-3x+1}}{e^{4x-2-x+2}} = \frac{e^{-x-2}}{e^{3x}} = e^{-x-2-3x} = e^{-4x-2}$.
- $a_6(x) = \frac{24}{-18}e^{5-3x-2x+1} = -\frac{4}{3}e^{-5x+6}$.

II Calculez les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$$
$$f_2(x) = x^4e^{-2x}$$
$$f_3(x) = x^3e^{\frac{2}{x}}$$

Correction :

- $f_1(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$.

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{e^x(e^x+2) - e^x(e^x-1)}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{3e^x}{(e^x+2)^2} \end{aligned}$$

- $f_2(x) = x^4e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 4x^3e^{-2x} + x^4(-2e^{-2x}) \\ &= 4x^3e^{-2x} - 2x^4e^{-2x} \\ &= 2x^3e^{-2x}(2-x) \end{aligned}$$

- $f_3(x) = x^3e^{\frac{2}{x}}$.

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 3x^2e^{\frac{2}{x}} + x^3\left(-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\right) \\ &= 3x^2e^{\frac{2}{x}} - 2xe^{\frac{2}{x}} \\ &= xe^{\frac{2}{x}}(3x-2) \end{aligned}$$

III Résoudre les équations et inéquations suivantes

$(E_1) :\ e^x - e^2 = 0$

$(E_2) :\ \frac{e^{3x-2}}{e^{x+4}} = e^{-1}$

$(E_3) :\ e^{2x} \leqslant e^{x+1}$

$(E_4) :\ e^{3x-1} > -e^{2x+4}$

Correction :

- $$\begin{aligned}(E_1) &\iff e^x - e^2 = 0\\ &\iff e^x = e^2\\ &\iff x = 2 \qquad \text{Car } \exp \text{ st. croissante}\end{aligned}$$

  L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{2\}$.

- $$\begin{aligned}(E_2) &\iff \frac{e^{3x-2}}{e^{x+4}} = e^{-1}\\ &\iff e^{3x-2-x-4} = e^{-1}\\ &\iff e^{2x-6} = e^{-1}\\ &\iff 2x - 6 = -1 \qquad \text{Car } \exp \text{ st. croissante}\\ &\iff 2x = 5\\ &\iff x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

  L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

- $$\begin{aligned}(E_3) &\iff e^{2x} \leqslant e^{x+1}\\ &\iff 2x \leqslant x + 1 \qquad \text{Car } \exp \text{ st. croissante}\\ &\iff x \leqslant 1\end{aligned}$$

  L'ensemble solution est $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$.

- (E_4) : $e^{3x-1} > -e^{2x+4}$.
  Comme $e^{3x-1} > 0$ et $-e^{2x+4} < 0$,
  alors l'inégalité $e^{3x-1} > -e^{2x+4}$ est toujours vraie (un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif).
  L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

IV Déterminer le signe des expressions suivantes :

$f_1(x) = 5xe^{3x} - 2e^{3x}$

$f_2(x) = x^4e^{-2x} - 3x^2e^{-2x}$

Correction :

- $f_1(x) = 5xe^{3x} - 2e^{3x} = e^{3x}(5x - 2)$.
  Sur $\mathbb{R}$:
  $e^{3x} > 0$, donc le signe de $f_1(x)$ est celui de $5x - 2$ qui est affine croissante et s'annule en $\frac{2}{5}$.
  Ainsi on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- $f_2(x) = x^4e^{-2x} - 3x^2e^{-2x} = x^2e^{-2x}(x^2 - 3)$.
  Sur $\mathbb{R}$:
  $x^2e^{-2x} \geqslant 0$ pour tout x et s'annule en $x = 0$ (car $x^2 = 0$), donc le signe de $f_2(x)$ est celui de $x^2 - 3$ (sauf en $x = 0$ où $f_2(0) = 0$).
  $x^2 - 3$ est un polynôme du second degré qui s'annule en $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$, positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.
  Ainsi on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	