

I (4 points) On a tracé ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{cx^2}$$

où a , b et c sont des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de f . La droite \mathcal{D} est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0; elle passe par le point A de coordonnées $(0,5; 1)$. La tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

Correction :

Par lecture graphique :

- $f(0)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0. Graphiquement, $f(0) = 0$.
- $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente \mathcal{D} au point d'abscisse 0. Cette droite passe par le point $(0; f(0)) = (0; 0)$ et par $A(0,5; 1)$. Donc :

$$f'(0) = \frac{1 - 0}{0,5 - 0} = \frac{1}{0,5} = 2$$

- $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse 1. Comme T est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul. Donc $f'(1) = 0$.

2. Montrer que

$$f'(x) = (2acx^2 + 2bcx + a)e^{cx^2}$$

Correction :

Par la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{cx^2} + (ax + b) \times 2cxe^{cx^2} \\ &= e^{cx^2} [a + 2cx(ax + b)] \\ &= e^{cx^2} [a + 2acx^2 + 2bcx] \\ &= (2acx^2 + 2bcx + a)e^{cx^2} \end{aligned}$$

3. Déterminer les valeurs de a , b et c .

Correction :

On a

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff (a \times 0 + b)e^{c \times 0} = 0 \\ &\iff b = 0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f'(0) = 2 &\iff (2ac \times 0^2 + 2bc \times 0 + a)e^{c \times 0} = 2 \\ &\iff a = 1 \end{aligned}$$

Et puis :

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\iff (2 \times 2c \times 1 + 2 \times 0 \times c \times 1 + 2)e^c = 0 \\ &\iff (4c + 2)e^c = 0 \\ &\iff 4c + 2 = 0 \quad (\text{car } e^c \neq 0) \\ &\iff c = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $a = 1$, $b = 0$ et $c = -\frac{1}{2}$.

Et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

II (7 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal dont un morceau a été tracé dans le graphique ci-dessous.

1. Montrer que la dérivée de f s'exprime pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

1. Montrer que la dérivée de f s'exprime pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$$

Correction :

On a $f(x) = x^3 e^x$.

Par la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^x + x^3 e^x \\ &= (x^3 + 3x^2) e^x \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de variations de f . Vous y ferez figurer les limites admises suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = x^2(x+3)e^x$$

$e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2(x+3)$.

- $x^2 \geq 0$ pour tout x , et $x^2 = 0$ seulement en $x = 0$.
- $x \mapsto x + 3$ affine croissante et s'annule en -3 .

On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
x^2	+	+	0	+
$x + 3$	-	0	+	+
$f'(x)$	-	0	0	+
f	0	$-27e^{-3}$		$+\infty$

$$\text{Calcul de } f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27e^{-3}.$$

3. Combien y-a-t-il de tangentes horizontales à \mathcal{C}_f ?

Correction :

Les tangentes horizontales correspondent aux points où $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (x^3 + 3x^2)e^x = 0 \\ &\iff x^2(x+3) = 0 \quad (\text{car } e^x > 0). \quad \iff x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Il y a donc deux points où la tangente est horizontale : aux abscisses $x = -3$ et $x = 0$.

4. Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C}_f en -1 .

Correction :

L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = -1$ est :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

On a :

- $f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1}$.
- $f'(-1) = ((-1)^3 + 3 \times (-1)^2) e^{-1} = (-1 + 3) e^{-1} = 2e^{-1}$.

Ainsi, l'équation de la tangente est :

$$y = 2e^{-1}(x+1) - e^{-1}$$

Ce qui donne :

$$T: y = e^{-1}(2x+1)$$

5. Représenter \mathcal{C}_f sur le graphique.

Correction :

Sur le graphique, la courbe \mathcal{C}_f est déjà tracée en rouge. Elle passe par l'origine (car $f(0) = 0$). Elle admet une tangente horizontale en $x = -3$ (point où elle atteint un minimum) et en $x = 0$. La courbe tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.



III (5 points)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$.

1. Au vu de ce graphique, quelle conjecture peut-on faire sur les variations de f ?

Correction :

On conjecture que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. On introduit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (e^{2x} - 1)(2x + 1)$$

Dresser le tableau de signe de g .

Correction :

On a $g(x) = (e^{2x} - 1)(2x + 1)$.

Signe de $e^{2x} - 1$:

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 \geq 0 &\iff e^{2x} \geq e^0 \\ &\iff 2x \geq 0 \text{ (car la fonction exp est croissante)} \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

$2x + 1$ s'annule en $-\frac{1}{2}$ et est positif pour $x > -\frac{1}{2}$, négatif pour $x < -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$e^{2x} - 1$	-	-	0	+	
$2x + 1$	-	0	+	+	
$g(x)$	+	0	-	0	+

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$, et en déduire le tableau de variations de f .

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} - 2x - 1 \\ &= e^{2x} + 2xe^{2x} - 2x - 1 \\ &= e^{2x}(1 + 2x) - (2x + 1) \\ &= (2x + 1)(e^{2x} - 1) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1 - 2e^{-1}}{4}$	0	$+\infty$	

Calcul de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1 - 2e^{-1}}{4}$$

4. Validez-vous votre conjecture ?

Correction :

D'après le tableau de variations, la fonction f n'est pas strictement croissante sur \mathbb{R} : elle est décroissante sur $\left] -\frac{1}{2}; 0 \right[$. La conjecture initiale est donc fausse.

IV* Montrer que f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.

Correction :

Pour montrer que f est impaire, il faut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par e^x :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$\text{Or } \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

On peut également vérifier que $f(0) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$, ce qui est cohérent avec une fonction impaire.