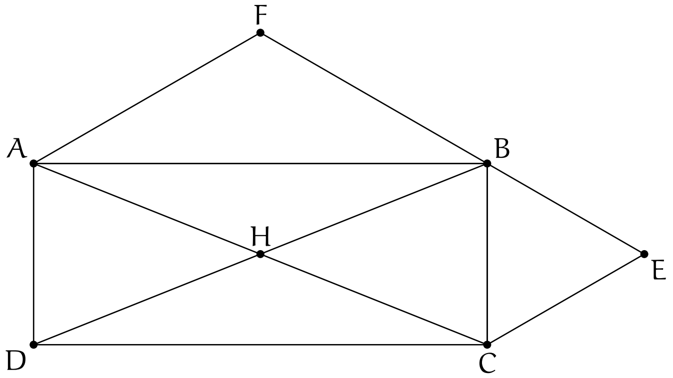
I La figure ci-dessous représente

- Un rectangle ABCD tel que $AB = 10$ et $BC = 4$;
- Un triangle ABF isocèle en F avec $\widehat{FAB} = \dfrac{\pi}{6}$.
- BCE est équilatéral.



Calculer les produits scalaires suivants ; vous compléterez la copie (aucune justification n'est demandée).

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} =$
- $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} =$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} =$
- $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} =$
- $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} =$
- $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CE} =$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF} =$
- $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC} =$

Correction :

1. Comme BCE est équilatéral, on a $\widehat{DCE} = \dfrac{5\pi}{6}$ et donc $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = 10.4.\cos\dfrac{5\pi}{6} = -20\sqrt{3}$
2. En posant des coordonnées dans le repère orthonormé $(D, \dfrac{\overrightarrow{DC}}{DC}, \dfrac{\overrightarrow{DA}}{DA})$, on a $D(0,0)$, $C(10,0)$, $B(10,4)$, $A(0,4)$, $B(5,2)$, $E(x_E, 2)$, $F(5, y_F)$.
   On a alors $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$,
   Alors $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = 50 + 8 = 58$
3. Comme au 1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} = AB.BE\cos\dfrac{\pi}{6} = 20\sqrt{3}$
4. Par projection orthogonale de C et H sur (AB), $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = -50$.
5. Comme au 3. : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} = -20\sqrt{3}$.
6. Il faut faire attention, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{CE}$ non colinéaires. Par exemple, on peut calculer x_E, par projection de E sur (DC), on a $x_E = 10 + 4\cos\dfrac{\pi}{6} = 10 + 2\sqrt{3}$.
   Alors $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CE} = 10\sqrt{3} + 4$.
7. Il nous faut la hauteur issue de F du triangle ABF pour répondre. Comme il est isocèle, et $\widehat{FAB} = \dfrac{\pi}{6}$,

par trigonométrie, on a $\tan \widehat{FAB} = \dfrac{h}{\frac{1}{2}AB}$ donc $h = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Alors par projection, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF} = -4.\dfrac{5}{\sqrt{3}} = -20\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

8. Par projection : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC} = 50$

II On donne dans un repère orthonormé : $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(5;1)$
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Correction :

On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(\widehat{BAC})$, alors on a :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -16 - 2 = -18$.

Et $AB^2 = 16 + 4 = 20$ donc $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AB^2 = 16 + 1 = 17$ donc $AC = \sqrt{17}$
Donc finalement

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-18}{2\sqrt{5}\times\sqrt{17}} = \frac{-18}{2\sqrt{85}}$$

Et avec la fonction $\arccos$ de la calculatrice, on a $\widehat{BAC} \approx 167,5°$.