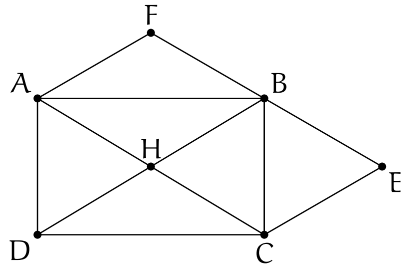
(I) La figure ci-dessous représente

- Un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 3$;
- Un triangle ABF isocèle en F avec $\widehat{FAB} = \frac{\pi}{6}$.
- BCE est équilatéral.



Calculer les produits scalaires suivants ; vous compléterez la copie (aucune justification n'est demandée).

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} =$
- $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} =$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} =$
- $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} =$
- $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} =$
- $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CE} =$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF} =$
- $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC} =$

Correction :

1. Comme BCE est équilatéral, on a $\widehat{DCE} = \frac{5\pi}{6}$

   et donc $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = 5.3.\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

2. En posant des coordonnées dans le repère orthonormé $(D, \frac{\overrightarrow{DC}}{DC}, \frac{\overrightarrow{DA}}{DA})$, on a $D(0,0)$, $C(5,0)$, $B(5,3)$, $A(0,3)$, $H(2.5, 1.5)$, $E(x_E, 1.5)$, $F(2.5, y_F)$.

   On a alors $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-2,5\\1,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$,

   Alors $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA} = (-2.5)\times(-5) + 1,5\times 3 = 12,5 + 4,5 = 17$.

3. Comme au 1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} = AB.BE.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

4. Par projection orthogonale de C et H sur (AB), $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = -2.5\times 5 = -12.5 = -\frac{25}{2}$.

5. Comme au 3. : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BE} = -\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

6. Il faut faire attention, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{CE}$ non colinéaires. Par exemple, on peut calculer x_E, par projection de E sur (DC), on a $x_E = 5 + 3\cos\frac{\pi}{6} = 5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

   Alors $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CE} = \dfrac{15\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{15\sqrt{3}+9}{4}$.

7. Il nous faut la hauteur issue de F du triangle ABF pour répondre. Comme il est isocèle, et $\widehat{FAB} = \dfrac{\pi}{6}$, par trigonométrie, on a $\tan \widehat{FAB} = \dfrac{h}{\frac{1}{2}AB}$ donc $h = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$.

   Alors par projection, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BF} = -3 \times \dfrac{5}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$.

8. Par projection : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC} = \dfrac{25}{2}$.

II On donne dans un repère orthonormé : $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(5;1)$

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Correction :

On sait que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$, alors on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$$

On a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4 \times 8 + (-2) \times (-3) = 32 + 6 = 38$.

Et $BA^2 = 4^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$ donc $BA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BC^2 = 8^2 + (-3)^2 = 64 + 9 = 73$ donc $BC = \sqrt{73}$

Donc finalement

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{38}{2\sqrt{5} \times \sqrt{73}} = \frac{38}{2\sqrt{365}} = \frac{19}{\sqrt{365}}$$

Et avec la fonction $\arccos$ de la calculatrice, on a $\widehat{ABC} \approx 6.0°$.