

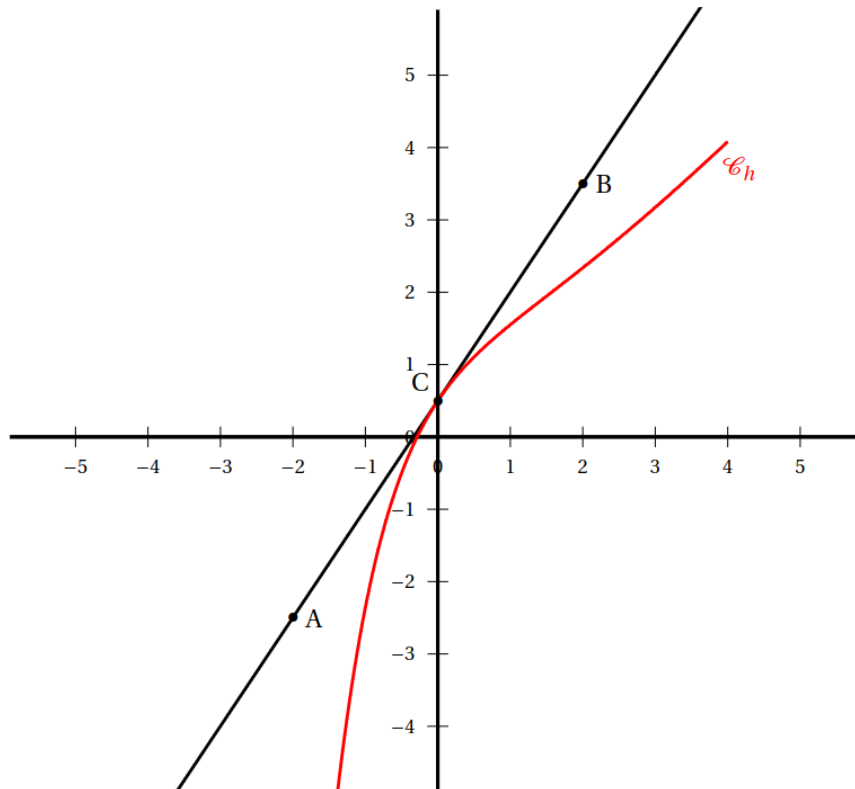
**I Automatismes (6 points)**

à rendre à part.

**II (3 points)** On considère une fonction  $h$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Dans le repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$  ;
- les points A et B de coordonnées respectives  $(-2 ; -2,5)$  et  $(2 ; 3,5)$  ;
- la droite (AB) tangente à  $\mathcal{C}_h$  au point  $C(0 ; 0,5)$ .

1. Déterminer  $h(0)$  et  $h'(0)$ . Justifier.**Correction :** $C(0; 0,5) \in \mathcal{C}_h$ , donc  $h(0) = 0,5$ .La droite (AB) est tangente à  $\mathcal{C}_h$  au point C, donc le nombre dérivé  $h'(0)$  est le coefficient directeur de la droite (AB).

On calcule le coefficient directeur de (AB) :

$$h'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3,5 - (-2,5)}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

2. On admet que  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Montrer que pour tout réel  $x$  :

$$h'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} + 1.$$

**Correction :**

En dérivant à l'aide de la formule du produit et en tenant compte du fait que  $(e^{-x})' = -e^{-x}$ , on a pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= ae^{-x} + (ax + b) \times (-e^{-x}) + 1 \\ &= ae^{-x} - axe^{-x} - be^{-x} + 1 \\ &= (-ax + a - b)e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Et il s'agit bien de l'expression demandée.

3. En déduire les valeurs de  $a$  et  $b$  puis l'expression de  $h$ .

**Correction :**

On a :

$$\begin{aligned} h(0) = 0,5 &\iff (a \times 0 + b)e^0 + 0 = 0,5 \\ &\iff b = 0,5 \end{aligned}$$

Ainsi  $b = \frac{1}{2}$ .  
D'autre part :

$$\begin{aligned} h'(0) = \frac{3}{2} &\iff (-a \times 0 + a - b)e^0 + 1 = \frac{3}{2} \\ &\iff a - b + 1 = \frac{3}{2} \\ &\iff a - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ &\iff a = 1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $a = 1$  et  $b = \frac{1}{2}$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x.$$

**III (3 points)** Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport. S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol. Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport. Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8. S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

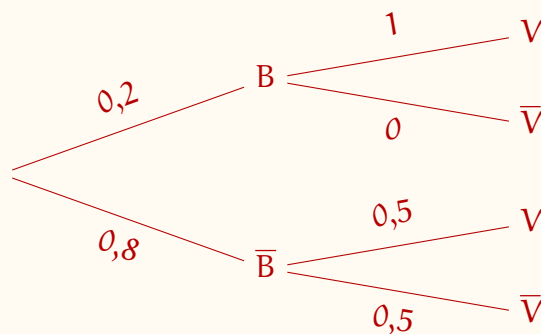
On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

**Correction :**

On a d'après les données de l'énoncé et la loi des noeuds :  
L'arbre pondéré est donc :



2. Calculer la probabilité pour que Julien ait réussi à prendre son bus, et soit à l'heure à l'aéroport pour son vol.

**Correction :**

On cherche  $P(B \cap V) = P(B) \times P_B(V) = 0,2 \times 1 = 0,2$ .

3. Calculer la probabilité pour que Julien soit à l'heure à l'aéroport pour son vol.

**Correction :**

On cherche  $P(V)$ . B et  $\bar{B}$  forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) \\ &= P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V) \\ &= 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 \\ &= 0,2 + 0,4 = 0,6. \end{aligned}$$

4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus?

**Correction :**

On cherche  $P_V(B)$ .

$$P_V(B) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

**IV** (4 points) Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1<sup>er</sup> jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location. Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures. Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite  $(u_n)$ , où, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  représente le nombre de voitures louées le  $n$ -ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi  $u_0 = 280$ . On admet que cette modélisation conduit à l'égalité :  $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$ .

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019?

**Correction :**

Le mois de février 2019 correspond à  $n = 1$  (un mois après janvier).

$$u_1 = 0,9u_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = 294.$$

Donc 294 voitures ont été louées en février 2019.

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $v_n = u_n - 420$ .

- (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

**Correction :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 \\ &= (0,9u_n + 42) - 420 \\ &= 0,9u_n - 378 \\ &= 0,9(u_n - 420) \quad \text{car } 0,9 \times 420 = 378 \\ &= 0,9v_n. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,9$ .

Son premier terme :  $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$ .

- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et montrer que  $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$ .

**Correction :**

Du fait que  $(v_n)$  soit géométrique, on a :  $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times 0,9^n$ .

Ainsi  $u_n = v_n + 420 = -140 \times 0,9^n + 420$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Correction :**

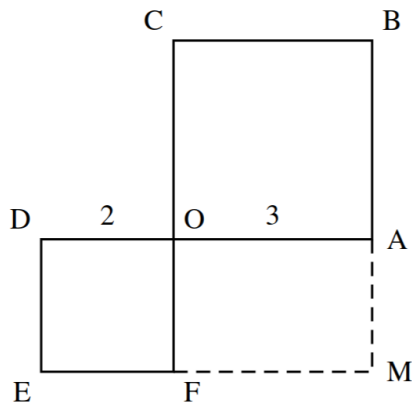
On a  $0 < 0,9 < 1$ , donc par propriété  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ .

et par produit et somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 420$ .

Dans le contexte, le nombre de voitures louées chaque mois se rapprochera de 420 à long terme.

**(V) (4 points)** OABC et ODEF sont des carrés dont les côtés respectifs mesurent 3 et 2. OAMF est un rectangle. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC).

On donne le repère orthonormé  $\left( O, \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \right)$ .



1. Donner les coordonnées des points C, D et M.

**Correction :**

Dans le repère orthonormé  $(O, \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OC})$ , on a  $A(3; 0)$ ,  $C(0; 3)$ .  
On a par lecture graphique :

$$C(0; 3), \quad D(-2; 0), \quad M(3; -2).$$

2. La droite (OM) est-elle perpendiculaire à la droite (DC)?

**Correction :**

On a  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{DC} = 3 \times (-2) + 2 \times 3 = 0.$$

Donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (OM) et (DC) sont perpendiculaires.

3. Calculer  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM}$ .

**Correction :**

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$  (car  $D(2; 0)$ ,  $C(0; 3)$ ).  $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  (car  $M(3; 2)$ ,  $C(0; 3)$ ).

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = -2 \times 3 + (3) \times (5) = 9.$$

4. En déduire la longueur CH.

**Correction :**

Le point H étant le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC), d'après la propriété du produit scalaire par projection, on a :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH}$$

Puisque H appartient à la droite (DC), les vecteurs  $\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{CH}$  sont colinéaires. De plus, leur produit scalaire est positif ( $9 > 0$ ), ils sont donc de même sens. Par conséquent :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} = CD \times CH \quad (\star)$$

D'autre part  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et donc  $CD^2 = 4 + 9 = 13$ .

Donc en reprenant (★), il vient  $9 = \sqrt{13}CH$ . et donc  $CH = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$  u.l..