Devoir de Mathématiques N^o 7 (2 heures)

Les réponses doivent être justifiées. Le barème est purement indicatif.

Exercice 1 (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $(2x-5)^4 \leq 16$
2. $\dfrac{5x+1}{x^2-4} \leq \dfrac{3}{x-2}$
3. $\dfrac{x+1}{3-x} \leq x$

Exercice 2 (1 points)

Quel est le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^4+5x^2+1=0$?

Exercice 3 (3 points)

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle, $M \in [AD]$, $N \in [AB]$, $AD = 10$ cm, $AB = 4$ cm, $BN = x$, $MD = 2x$.

1. A quel intervalle x peut-il appartenir ?
2. Démontrer que l'aire du triangle MNC est de $20 - x^2$ cm^2
3. Déterminer pour quelles valeurs de x l'aire du triangle MNC est inférieure à 16 cm^2.

Exercice 4 (2,5 points)

Dans la figure ci-contre, les points B et C sont sur le cercle de diamètre [AD] et de centre O et tels que AB=AO et BOC triangle rectangle direct. On note I le point d'intersection de (BD) et (CA).

1. (a) Démontrer que les triangles BIC et AID sont semblables.
   (b) Calculer BC en fonction du rayon R du cercle. En déduire que le rapport d'agrandissement est de $\sqrt{2}$.
2. Démontrer que l'aire de AID est le double de celle de BIC.

Exercice 5 (3 points)

Soit ABCD un carré ; I et H les milieux respectifs des côtés [AD] et [DC]. K le point d'intersection de (IB) et (AH).

1. Montrer que AIK et AIB sont semblables.
2. Etablir le rapport de similitude entre AIK et AIB.
3. En déduire le rapport $\dfrac{\mathscr{A}(AIK)}{\mathscr{A}(ABCD)}$ des aires de AIK et ABCD.

Exercice 6 (2 points)

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $A \notin \mathscr{D}$. A tout point M de la droite $\mathscr{D}$, on construit les points N et M' tels que AMNM' soit un carré direct.

1. Faire une figure.
2. Déterminer le lieu des points M' lorsque M décrit la droite $\mathscr{D}$ *(ind : Quelle est la transformation qui transforme M en M' ?).*
3. Dessiner alors cet ensemble.

Exercice 7 (3,5 points)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et M un point de (AB). La droite (OM) coupe (CD) en P et la perpendiculaire à (MP) en O coupe (AD) en N et (BC) en Q. On note s la symétrie de centre O.

1. (a) Quel est l'image de (AB) par s ?
   (b) Quel est l'image de (MP) par s ?
   (c) En déduire l'image de M par s.
2. (a) Quel est l'image de (AD) et (BQ) par s ?
   (b) En déduire l'image de N.
3. Déduire des questions précédentes que MNPQ est un losange.