

Devoir de Mathématiques N° 8 (1 heures)

Exercice (6 points)

1. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

(a) $i\bar{z} = \bar{z} - i$

(b) $2\bar{z} + iz = 1 - i$

2. Ecrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

(a) $z_1 = -4$

(b) $z_2 = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$

3. Ecrire sous forme algébrique $z = (1 - i)^{12}$.

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 + az + b)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(b) Résoudre $z^3 = 8$ et donner les solutions sous forme exponentielle.

Exercice (8 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit A le point d'affixe $3 + 2i$, B d'affixe -3 et C d'affixe $1 - 2i$.

1. (a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $e = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$.

(b) Que pouvez-vous en déduire pour le triangle ABC ?

2. A tout point M du plan complexe d'affixe $z \neq z_B$, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{z - z_A}{z - z_B}$$

(a) Déterminer l'ensemble \mathcal{E}_1 des points $M(z)$ tel que $M'(z')$ est un point du cercle de centre O et de rayon 1.

(b) Déterminer l'ensemble \mathcal{E}_2 des points $M(z)$ tel que z' est imaginaire pur.

(c) Déterminer l'ensemble \mathcal{E}_3 des points $M(z)$ tel que z' est un réel négatif ou nul.

Exercice (6 points)

Soit $z = i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1. (a) Déterminer la forme algébrique puis une forme exponentielle de z^2 .

(b) En déduire une forme exponentielle de z .

2. Déterminer une forme exponentielle puis algébrique de z^6 , et z^{12} .