T^{ale} *14 octobre 2020*

Devoir nº 3 : Suites (2h)

I **(4 points)** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 2^{2n} - 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$
3. $w_n = \dfrac{\sin(n^3)}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$
4. $z_n = \dfrac{0,2^n - 0,3^n}{0,2^n + 0,3^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

II **(6 points)** On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n\,(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Compléter le programme Python afin qu'il satisfasse cette exigence.

```python
u=...
n=...
while ...... :
    u=...
    n=...
print(...)
```

III **(4 points)** Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

1. Etudier les variations de f est sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Montrer que la suite (u_n) converge.
5. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Déterminer la limite ℓ.

IV **(3 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$$

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

V **(3 points)** *Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.*

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Affirmation : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$
2. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

   Affirmation : La suite (v_n) converge.
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n\sqrt{n}$.
   Affirmation : Si (v_n) converge alors il en est de même pour (u_n).

VI **(seulement en bonus (1 point)** On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Donner la nature de la suite (w_n). Calculer $w_{2\,009}$.