DS N°1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h15)

I

1. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \dfrac{x^2}{k} - x$ et donc
$$f_k'(x) = \frac{2x}{k} - 1.$$
Cette dernière fonction est affine.
Elle s'annule lorsque $\dfrac{2x}{k} = 1$ et donc lorsque $x = \dfrac{k}{2}$.
De plus $f_k\left(\dfrac{k}{2}\right) = -\dfrac{k}{4}$. Ceci permet de dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{k}{2}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	$\searrow$		$-\frac{k}{4}$	$\nearrow$	

2. D'après le graphique, on conjecture que la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}x$.
3. D'après le tableau de variation, les sommets des paraboles sont les points $S_k\left(\frac{k}{2}, -\frac{k}{4}\right)$ et donc on a $-\frac{1}{2}x_{S_k} = -\frac{1}{2}\frac{k}{2} = -\frac{k}{4} = y_{S_k}$.
Ceci montre que $S_k \in \mathcal{D}$.
Les sommets sont donc bien alignés.
4. Le minimum étant atteint en $\dfrac{k_0}{2}$, on lit graphiquement que $\dfrac{k_0}{2} = 5$ et donc $k_0 = 10$.

II

1. On a
$$g(x) = (\mathrm{e}^{2x} - 1)(2x + 1)$$
Cette forme est factorisée et nous pouvons en établir le signe.
Signe de $\mathrm{e}^{2x} - 1$:
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} - 1 \geq 0 &\iff \mathrm{e}^{2x} \geq \mathrm{e}^0 \\ &\iff 2x \geq 0 \qquad \text{(car la fonction exp est croissante)} \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$
D'autre part, $x \longmapsto 2x + 1$ est affine et s'annule en $-\dfrac{1}{2}$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1 \\ &= \mathrm{e}^{2x}(2x+1) - (2x+1) \\ &= (2x+1)(\mathrm{e}^{2x} - 1) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1-2\mathrm{e}}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

avec $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1-2\mathrm{e}^{-1}}{4}$.

3. L'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Ici $f(1) = \mathrm{e}^2 - 2$ et $f'(1) = 3(\mathrm{e}^2 - 1)$. Alors

$$T : y = 3(\mathrm{e}^2 - 1)(x-1) + (\mathrm{e}^2 - 2).$$

Ce qui donne :

$$T : y = 3(e^2 - 1)x - 2e^2 + 1.$$

III On a $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + n + 2)$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n$.

Initialisation : On a bien pour $n = 0$: $\dfrac{1}{2^n} + n = 1$.

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $u_k = \dfrac{1}{2^k} + k$ et montons l'égalité au rang suivant :
On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2}(u_k + k + 2) && \text{(par def de la suite } (u_n)) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2^k} + k + k + 2) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + k + 1 \end{aligned}$$

L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n$.

IV

1. Voir sur le graphique.
On conjecture que (u_n) est croissante et converge vers 200.

2. (a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 115$, $u_1 = 0,4.115 + 120 = 166$, donc $u_1 > u_0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $u_{k+1} \geq u_k$ et montrons la propriété au rang suivant :

On a :

$$\begin{array}{rcl} & u_{k+1} \geq u_k & \\ \text{Donc} & 0,4.u_{k+1} \geq 0,4.u_k & \text{(par produit par } 0,4 > 0) \\ \text{Donc} & 0,4.u_{k+1} + 120 \geq 0,4.u_k + 120 & \text{(par somme de 120)} \\ \text{Donc} & u_{k+2} \geq u_{k+1} & \end{array}$$

et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \geq u_n$

(b) Cette dernière question montre que (u_n) est croissante.

3. (a) On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 \\ &= 0,4u_n + 120 - 200 \\ &= 0,4u_n - 80 \\ &= 0,4(u_n - \frac{80}{0,4}) \\ &= 0,4(u_n - 200) \\ &= 0,4v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 200 = -85$.

(b) On a donc par propriété pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n = -85.0,4^n$.

(c) Il s'ensuit $u_n = v_n + 200 = 200 - 85.0,4^n$.

(d) Comme $-1 < 0,4 < 1$, on a par propriété : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,4^n = 0$ et donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200$.

4. On a :

```
1 def rang(A) :
2   n = 0
3   u = 120
4   while u < A :
5     u = 0.4*u+120
6     n = n + 1
7   return n
```

```
1 def rang(A) :
2   n = 0
3   u = 120
4   while u < A :
5     u = 0.4*u+120
6     n = n + 1
7   return u
```

```
1 def rang(A) :
2   n = 0
3   u = 120
4   while u > A :
5     u = 0.4*u+120
6     n = n + 1
7   return n
```

Par élimination, le deuxième programme ne marche pas car il renvoie la valeur de u et non pas le rang. Le 3éme ne fonctionne pas car la condition est mauvaise dans le `while`. Il ne reste que le premier programme.