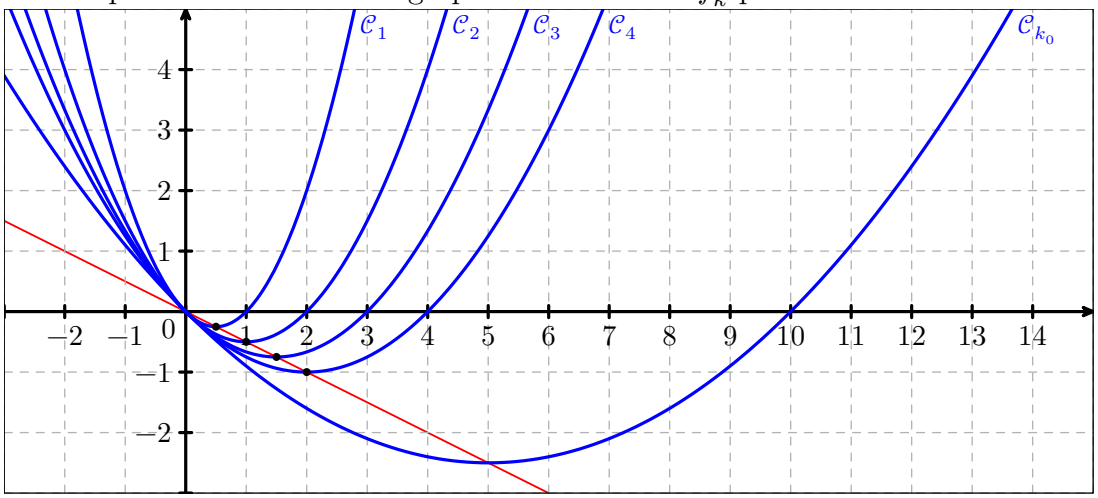
DS N°1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h15)

Ⓘ (4 points) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On définit les fonctions f_k sur $\mathbb{R}$, par :

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k} - x$$

On a représenté ci-dessous le graphe des fonctions f_k pour certaines valeurs de k.



1. Montrer que le tableau de variation de f_k est donné par :

x	$-\infty$		$\frac{k}{2}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k		↘	$-\frac{k}{4}$	↗	

2. Comme le montre le graphique ci-dessus les sommets des paraboles semblent alignés sur une même droite $\mathcal{D}$. Quelle serait l'équation de cette droite ?
3. Démontrer cette conjecture.
4. L'une des courbe représentée est celle de f_{k_0}. Déterminer en justifiant la valeur de k_0.

Ⓘ Ⓘ (5 points) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{2x} - x^2 - x$.

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (\mathrm{e}^{2x} - 1)(2x + 1)$$

Dresser le tableau de signe de g.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$, et en déduire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

III (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + n + 2)$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{2^n} + n$.

IV (7 points)

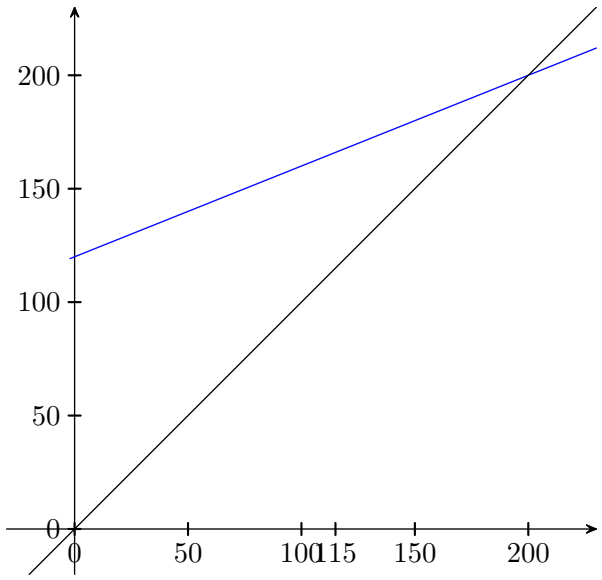
On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 115$ et la relation de récurrence suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 0,4u_n + 120$$

On note f la fonction affine donnée par

$$f(x) = 0,4x + 120$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Sur le graphique ci-dessous, le graphe de la fonction f est représenté ainsi que celui de la droite d'équation $y = x$.
   Représentez sur l'axe des abscisses et sans faire de calcul les termes u_0, u_1, u_2, u_3 de (u_n).
   Emmètre une conjecture sur les variations et la limite éventuelle de (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$u_{n+1} \geq u_n$$
   (b) En déduire les variations de (u_n).
3. (a) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression explicite de la suite (u_n).
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On cherche à faire un algorithme qui affiche le rang à partir duquel on a $u_n \geq 199$. Un seul des algorithmes ci-dessous renvoie le bon résultat lorsqu'on tape `rang(199)`. Lequel ?

```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u < A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return n
```

```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u < A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return u
```

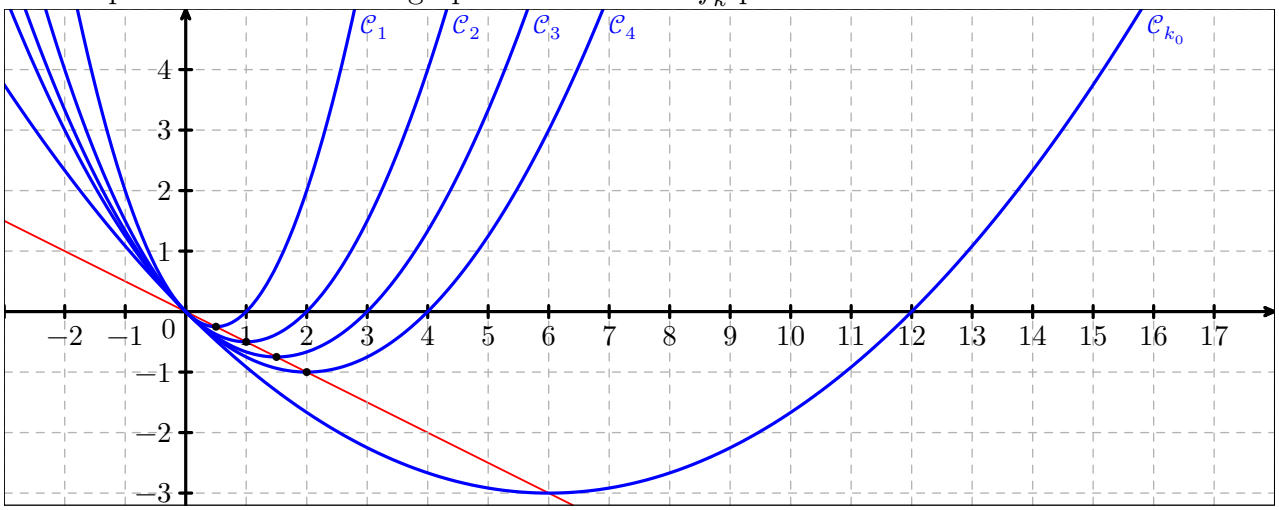
```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u > A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return n
```

DS N°1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h15)

Ⓘ (4 points) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On définit les fonctions f_k sur $\mathbb{R}$, par :

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k} - x$$

On a représenté ci-dessous le graphe des fonctions f_k pour certaines valeurs de k.



1. Montrer que le tableau de variation de f_k est donné par :

x	$-\infty$		$\frac{k}{2}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k		↘	$-\frac{k}{4}$	↗	

2. Comme le montre le graphique ci-dessus les sommets des paraboles semblent alignés sur une même droite $\mathcal{D}$. Quelle serait l'équation de cette droite ?
3. Démontrer cette conjecture.
4. L'une des courbe représentée est celle de f_{k_0}. Déterminer en justifiant la valeur de k_0.

Ⓘ (5 points) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{2x} - x^2 - x$.

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (\mathrm{e}^{2x} - 1)(2x + 1)$$

Dresser le tableau de signe de g.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$, et en déduire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

III **(4 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n - n^2 + 2n + 1)$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + n^2$.

IV **(7 points)**

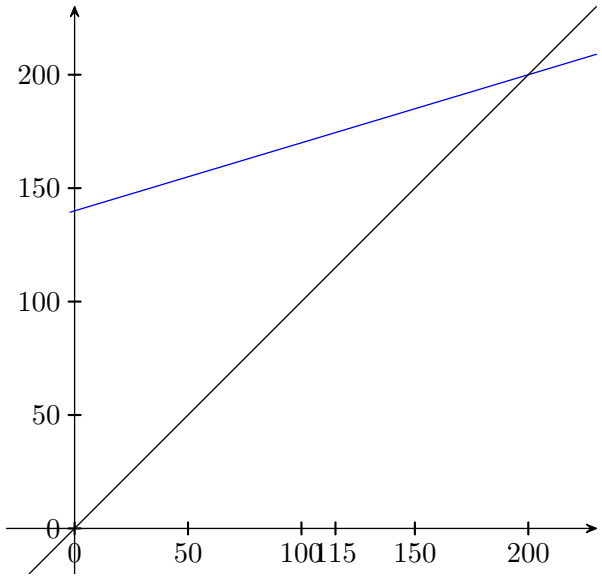
On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 115$ et la relation de récurrence suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 0,3u_n + 140$$

On note f la fonction affine donnée par

$$f(x) = 0,3x + 140$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Sur le graphique ci-dessous, le graphe de la fonction f est représenté ainsi que celui de la droite d'équation $y = x$.
   Représentez sur l'axe des abscisses et sans faire de calcul les termes u_0, u_1, u_2, u_3 de (u_n).
   Emmètre une conjecture sur les variations et la limite éventuelle de (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$u_{n+1} \geq u_n$$

   (b) En déduire les variations de (u_n).
3. (a) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression explicite de la suite (u_n).
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On cherche à faire un algorithme qui affiche le rang à partir duquel on a $u_n \geq 199$. Un seul des algorithmes ci-dessous renvoie le bon résultat lorsqu'on tape `rang(199)`. Lequel ?

```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u < A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return n
```

```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u < A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return u
```

```
def rang(A) :
  n = 0
  u = 120
  while u > A :
     u = 0.4*u+120
     n = n + 1
  return n
```