BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1/11 à 11/11.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Remplir la feuille annexe selon les modalités expliquées ci-dessous :

- **Ne pas oublier d'écrire nom, prénom et groupe de spécialité dans le cadre et de noircir le code personnel.**
- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
- Noircir proprement, pour chaque question, la case correspondant à la bonne réponse. En cas d'erreur, effacer à l'aide de blanc correcteur en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne pas reconstituer la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse.
- **L'annexe est à rendre avec la copie.**

Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

Correction :

Pour $x \in [0;1]$, $g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$ est une fonction affine qui s'annule en 1 et donc par propriété $g'(x) \geq 0$ sur $x \in [0;1]$ et g est strictement croissante.
De plus $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2. Calculer u_1 et u_2.

Correction :

$u_1 = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

$u_2 = g\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{3}{4}$. On a bien $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$.
Hérédité : Pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $0 < u_k < u_{k+1} < 1$ et montrons $0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 1$.

On a $0 < u_k < u_{k+1} < 1$, et g est strictement croissante sur $[0;1]$ (d'après la question 1). Donc :

$$g(0) < g(u_k) < g(u_{k+1}) < g(1)$$

c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 1$.
L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

La suite (u_n) est strictement croissante (car $u_n < u_{n+1}$) et majorée par 1. Donc par théorème, elle converge vers une limite $\ell \leq 1$.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

Correction :

On a

- $u_{n+1} = g(u_n)$.
- (u_n) vers $\ell \leq 1$.
- g est continue sur $]-\infty; +\infty[$ car g est un polynôme.

Alors par théorème du point fixe $g(\ell) = \ell$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2\ell - \ell^2 = \ell &\iff \ell^2 - \ell = 0 \\ &\iff \ell(\ell - 1) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \end{aligned}$$

La suite étant croissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\ell \geq u_0 > 0$, donc $\ell = 1$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln\left(1 - (2u_n - u_n^2)\right) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln\left((1 - u_n)^2\right) \\ &= 2\ln(1 - u_n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Correction :

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times 2^n = -(\ln 2) \times 2^n$.

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

Correction :

On a $v_n = \ln(1 - u_n)$, donc $1 - u_n = \mathrm{e}^{v_n}$
et il vient donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \mathrm{e}^{v_n} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-(\ln 2)\times 2^n} \end{aligned}$$

On a $2 > 0$ donc par propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln 2.2^n = -\infty$, et donc par composée $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln 2)\times 2^n} = 0$, et par somme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

9. Recopier et compléter le script python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
1 def seuil() :
2  n = 0
3  u = 0.5
4  while u < 0.95 :
5   n = n+1
6   u = 2*u - u**2
7  return n
```

Correction :

Ligne 5 : `n = n+1`
Ligne 6 : `u = 2*u - u**2`

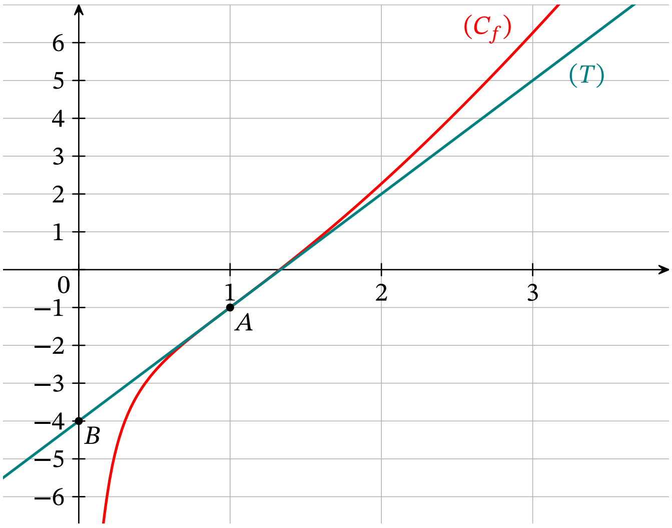
Exercice 3 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}$$

Partie A - Lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (C_f) de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(1\,;-1)$. Cette tangente passe également par le point $B\,(0\,;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).

Correction :

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (T). On a $A(1;-1)$ et $B(0;-4)$, donc :

$$f'(1) = \frac{-4-(-1)}{0-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

L'équation de (T) est de la forme $y = 3x + b$. $B(0;-4)$ donne $b = -4$, donc $(T)\ :\ y = 3x - 4$.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe (C_f) ?

Correction :

Graphiquement, f semble concave sur $]0;1]$ (courbe en dessous de ses tangentes) et convexe sur $[1;+\infty[$ (courbe au-dessus de ses tangentes).
Le point A semble être un point d'inflexion car la courbe y traverse sa tangente et la convexité change.

Partie B - Étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.

Correction :

Pour $x > 0$, on a $f(x) = 2x\ln x - \dfrac{1}{x}$.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc par somme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

En 0^+ : $\lim_{x \to 0^+} 2x \ln x = 0$ (théorème des croissances comparées) et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par somme

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Correction :

Pour $x > 0$, on a $f(x) = 2x \ln x - \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

   b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

Correction :

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2 - 2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

3. a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Correction :

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-1)$ et on a le tableau de convexité suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		*concave*		*convexe*	

Il y a changement de courbure en $x = 1$- f admet donc un point d'inflexion $A(1; f(1))$ comme point d'inflexion.

b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Correction :

Le signe de f'' nous donne les variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
f'	||	$\searrow$	3	$\nearrow$	

On a donc pour $x > 0$, $f'(x) \geq 3 > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Correction :

Sur $]0; +\infty[$:

- f est strictement croissante.
- f est continue (car dérivable).
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, donc 0 est intermédiaire à ces deux limites.

Par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.

b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Correction :

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1{,}32$.

On a $f(\alpha) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0 &\iff 2\alpha \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} \\ &\iff \ln \alpha^2 = \frac{1}{\alpha^2} \\ &\iff \alpha^2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha^2}} \quad \text{(en applicant exp)} \end{aligned}$$

Exercice 4 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$.
On considère :

— les points $A\,(-2\,;0\,;2)$, $B\,(-1\,;3\,;0)$, $C\,(1\,;-1\,;2)$ et $D\,(0\,;0\,;3)$

— la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

— la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de coefficient k tel que $3 = k \times 1$ et $-1 = k \times 3$ simultanément.
Donc A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

Correction :

On a :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 9 - 10 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 3 + 0 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est normal à (ABC).

b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

Correction :

(ABC) à pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ donc par propriété $(ABC)\ :\ x + 3y + 5z + d = 0$.
$A(-2;0;2) \in (ABC)$ donc $-2 + 3\times 0 + 5\times 2 + d = 0$, soit $-2 + 10 + d = 0$, donc $d = -8$.
Ainsi

$$(ABC)\ :\ x + 3y + 5z - 8 = 0.$$

c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Correction :

On vérifie si D appartient au plan (ABC) :
On a : $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3\times 0 + 5\times 3 - 8 = 7 \neq 0$.

Donc $D \notin (ABC)$, ainsi les quatre points ne sont pas coplanaires.

3. a) Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.
On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.

Correction :

$\mathcal{D}_1$ a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \vec{n}$, qui est normal au plan (ABC).

De plus, avec $t = 0$ dans les équations de $\mathcal{D}_1$ on obtient $D(0;0;3)$ donc $D \in \mathcal{D}_1$.

Ainsi $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par D et orthogonale à (ABC) : c'est la hauteur issue de D.

b) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Correction :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3(1+3s)+5s = -1 \\ 5(1+3s)+6s = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} x = t = \dfrac{1}{7} \\ y = 3t = \dfrac{3}{7} \\ z = 3+5t = \dfrac{26}{7} \end{cases}$$

Donc $I\left(\frac{1}{7};\frac{3}{7};\frac{26}{7}\right)$.

4. a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

Correction :

H est l'intersection de $\mathcal{D}_1$ (hauteur issue de D) avec le plan (ABC).

$$H(x;y;z) \in \mathcal{D}_1 \cap (ABC) \iff \begin{cases} x+3y+5z-8 = 0 \\ x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$$

$$\iff t+9t+5(3+5t)-8 = 0 \text{ Avec } (x,y,z), \text{ donné par } \mathcal{D}_1$$

$$\iff 35t+7 = 0$$

$$\iff t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5}$$

Alors $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}; \\ y = -\dfrac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}; \\ y = -\dfrac{3}{5} \\ z = 2 \end{cases}$

Ainsi $H\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}; 2\right)$.

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

Correction :

On a $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$

alors $DH^2 = \dfrac{1}{25} + \dfrac{9}{25} + 1 = \dfrac{35}{25}$

Donc

$$DH = \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}18$$