

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**  
**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**  
**SESSION 2026**

**MATHÉMATIQUES**

**Jour 2**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.  
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1/11 à 11/11.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

## Exercice 1

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Remplir la feuille annexe selon les modalités expliquées ci-dessous :

- **Ne pas oublier d'écrire nom, prénom et groupe de spécialité dans le cadre et de noircir le code personnel.**
- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
- Noircir proprement, pour chaque question, la case correspondant à la bonne réponse. En cas d'erreur, effacer à l'aide de blanc correcteur en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne pas reconstituer la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse.
- **L'annexe est à rendre avec la copie.**

## Exercice 2

6 points

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

### Partie A - Modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse. On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de  $n$  périodes de trente minutes. On a donc  $u_0 = 1$ .

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

#### Correction :

On a  $u_1 = 0,9 \times 1 + 0,25 = 0,9 + 0,25 = 1,15$ .  
La quantité est de 1,15 mg.

2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ .

#### Correction :

Chaque demi-heure, l'organisme élimine 10% de la quantité présente, donc il reste  $0,9u_n$ . On ajoute ensuite une dose de 0,25 mg. Ainsi  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ .

3. a) Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1} < 5$ .

#### Correction :

On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \leq u_{n+1} < 5$ .

**Initialisation :**  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1,15$ . On a bien  $1 \leq 1,15 < 5$ .

**Hérédité :** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , supposons  $u_k \leq u_{k+1} < 5$  et montrons  $u_{k+1} \leq u_{k+2} < 5$ .

On a :

$$u_k \leq u_{k+1} < 5$$

Donc  $0,9u_k + 0,25 \leq 0,9u_{k+1} + 0,25 < 0,9 \cdot 5 + 0,25$  car  $x \mapsto 0,9x + 0,25$  affine croissante

$$\text{Donc } u_{k+1} \leq u_{k+2} < 4,75 < 5$$

donc l'hérédité est démontrée.

**Conclusion :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1} < 5$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Correction :**

La suite  $(u_n)$  est croissante (car  $u_n \leq u_{n+1}$ ) et majorée par 5. Donc par théorème, elle converge vers une limite  $\ell \leq 5$ .

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
1 def efficace():
2     u = 1
3     n = 0
4     while .....:
5         u = .....
6         n = n + 1
7     return n
```

**Correction :**

Ligne 4: `while u < 1.8 :`  
Ligne 5: `u = 0.9*u + 0.25`

b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Correction :**

En exécutant le script, on trouve :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 1,15$ ,  $u_2 \approx 1,285$ ,  $u_3 \approx 1,4065$ ,  $u_4 \approx 1,51585$ ,  $u_5 \approx 1,614265$ ,  $u_6 \approx 1,7028385$ ,  $u_7 \approx 1,78255465$ ,  $u_8 \approx 1,854299185$ .

Au bout de 8 périodes, on dépasse 1,8 mg. La valeur renvoyée est donc  $n = 8$ .

Interprétation : le médicament devient réellement efficace au bout de  $8 \times 30 = 240$  minutes, soit 4 heures.

5. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = 2,5 - u_n$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $v_0$ .

**Correction :**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 2,5 - u_{n+1} \\
 &= 2,5 - (0,9u_n + 0,25) \\
 &= 2,5 - 0,9u_n - 0,25 \\
 &= 2,25 - 0,9u_n \\
 &= 0,9(2,5 - u_n) \\
 &= 0,9v_n
 \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,9$  avec  $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$ .

- b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$ .

**Correction :**

Par propriété des suites géométriques on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1,5 \times 0,9^n.$$

Comme  $v_n = 2,5 - u_n$ , on a  $u_n = 2,5 - v_n$  et donc

$$u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$$

- c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

**Correction :**

On a pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$ .

donc  $u_n < 2,5$ .

Ainsi la quantité ne dépasse jamais 2,5 mg, donc reste inférieure au seuil de toxicité de 3 mg. Par conséquent, le traitement ne présente pas de risque pour le patient.

**Partie B - Modèle continu de la quantité médicamenteuse**

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient en mg, en fonction du temps, est modélisée par la fonction  $f$ , définie sur  $[0 ; +\infty[$ , par :

$$f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$$

où  $t$  désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

**Correction :**

$$3h45min = 3,75h.$$

$$f(3,75) = 2,5 - 1,5e^{-0,2 \times 3,75} \approx 1,792 \text{ mg.}$$

Cette valeur est inférieure à 1,8 mg, donc le médicament n'est pas encore réellement efficace.

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

**Correction :**

On cherche  $t$  tel que  $f(t) \geq 1,8$ , soit :

$$f(t) \geq 1,8 \iff 2,5 - 1,5e^{-0,2t} \geq 1,8$$

$$\iff -1,5e^{-0,2t} \geq -0,7$$

$$\iff 1,5e^{-0,2t} \leq 0,7$$

$$\iff e^{-0,2t} \leq \frac{0,7}{1,5} = \frac{7}{15}$$

$$\iff -0,2t \leq \ln\left(\frac{7}{15}\right)$$

$$\iff t \geq -5 \ln\left(\frac{7}{15}\right)$$

$$\text{Et } -5 \ln \frac{7}{15} \approx 3,81 \approx 3h49$$

Donc à partir de 3 h 49 min, le médicament est réellement efficace.

3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4.b) du modèle discret de la Partie A.

**Correction :**

Avec le modèle discret, on trouvait 4 heures (8 périodes de 30 min). Avec le modèle continu, on trouve environ 3h 49 min.

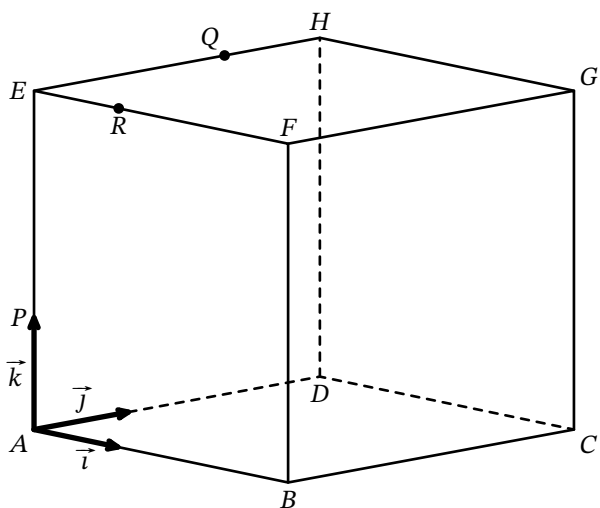
Les deux résultats sont proches, le modèle discret donnant un temps légèrement supérieur. Cette différence s'explique par le fait que le modèle discret considère des paliers de 30 minutes alors que le modèle continu est plus précis.

**Exercice 3**

**4 points**

Le solide  $ABCDEFGH$  est un cube. On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace dans lequel les coordonnées des points  $B$ ,  $D$  et  $E$  sont :

$$B(3;0;0), \quad D(0;3;0) \quad \text{et} \quad E(0;0;3)$$



On considère de plus les points  $P(0;0;1)$ ,  $Q(0;2;3)$  et  $R(1;0;3)$ .

1. Montrer que le triangle  $PQR$  est isocèle en  $R$ .

**Correction :**

On a  $\overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{RQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Alors  $RP^2 = (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2 = 1 + 0 + 4 = 5$ , donc  $RP = \sqrt{5}$ .

$RQ^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = 1 + 4 + 0 = 5$ , donc  $RQ = \sqrt{5}$ .

Ainsi  $RP = RQ$ , le triangle  $PQR$  est isocèle en  $R$ .

2. Justifier que les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  définissent un plan.

**Correction :**

On a  $\overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{RQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.  
Donc les trois points ne sont pas alignés et définissent un plan.

3. On s'intéresse à présent à la distance entre le point  $E$  et le plan  $(PQR)$ .

- a) Montrer que le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(PQR)$ .

**Correction :**

Calculons les produits scalaires :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{RP} = 2 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times (-2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{RQ} = 2 \times (-1) + 1 \times 2 + (-1) \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(PQR)$ , donc  $\vec{u}$  est normal à  $(PQR)$ .

b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(PQR)$ .

**Correction :**

Un plan de vecteur normal  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  a une équation de la forme  $2x + y - z + d = 0$ .

Le point  $R(1; 0; 3)$  appartient au plan, donc  $2 \times 1 + 0 - 3 + d = 0$ , soit  $2 - 3 + d = 0$ , d'où  $d = 1$ .

Ainsi une équation cartésienne de  $(PQR)$  est :  $2x + y - z + 1 = 0$ .

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(d)$  passant par le point  $E$  et orthogonale au plan  $(PQR)$ .

**Correction :**

La droite  $(d)$  est orthogonale à  $(PQR)$ , donc elle admet  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur.

Elle passe par  $E(0; 0; 3)$ , donc une représentation paramétrique est :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d) Montrer que le point  $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$  est le projeté orthogonal du point  $E$  sur le plan  $(PQR)$ .

**Correction :**

Le projeté orthogonal  $L$  de  $E$  sur  $(PQR)$  est l'intersection de  $(d)$  avec  $(PQR)$ .

$$\begin{aligned} L(x; y; z) \in (d) \cap (PQR) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2(2t) + t - (3 - t) + 1 = 0 \quad (\text{avec } (x, y, z) \text{ donné par } (d)) \\ &\Leftrightarrow 4t + t - 3 + t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6t - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} x = 2 \times \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 3 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc  $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$  est bien le point d'intersection, donc le projeté orthogonal de  $E$  sur  $(PQR)$ .

e) Déterminer la distance entre le point  $E$  et le plan  $(PQR)$ .

**Correction :**

$$\text{On a } \vec{EL} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } EL^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc } EL = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

4. En choisissant le triangle  $EQR$  comme base, montrer que le volume du tétraèdre  $EPQR$  est  $\frac{2}{3}$ .

**Correction :**

Par propriété du cube,  $EQR$  est rectangle en  $E$  ( $E$  est un coin).

$$\text{L'aire de } EQR \text{ est donc } \mathcal{A}(EQR) = \frac{1}{2} \times EQ \times ER = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1 \text{ u.a.}$$

La hauteur du tétraèdre issue de  $P$  est la distance de  $P$  au plan  $(EQR)$ .  
et cette hauteur est  $[PE]$  car par propriété du cube  $[PE]$  perpendiculaire à  $(EQR)$ .

On a  $PE = 2$  et donc  $\mathcal{V}(EPQR) = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$ .  
ce qui nous donne :

$$\mathcal{V}(EPQR) = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3} \text{ u.v.}$$

5. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle  $PQR$ .

**Correction :**

On a deux façons de calculer le volume du tétraèdre  $EPQR$  :

• Avec la base  $EQR$ , on a trouvé  $\mathcal{V} = \frac{2}{3}$ .

• Avec la base  $PQR$ , la hauteur est la distance de  $E$  au plan  $(PQR)$ , soit  $EL = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

$$\text{Donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(PQR) \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{9} \times \mathcal{A}(PQR).$$

$$\text{Ainsi } \frac{\sqrt{6}}{9} \times \mathcal{A}(PQR) = \frac{2}{3}, \text{ d'où :}$$

$$\mathcal{A}(PQR) = \frac{2}{3} \times \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u.a.}$$

**Exercice 4****5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

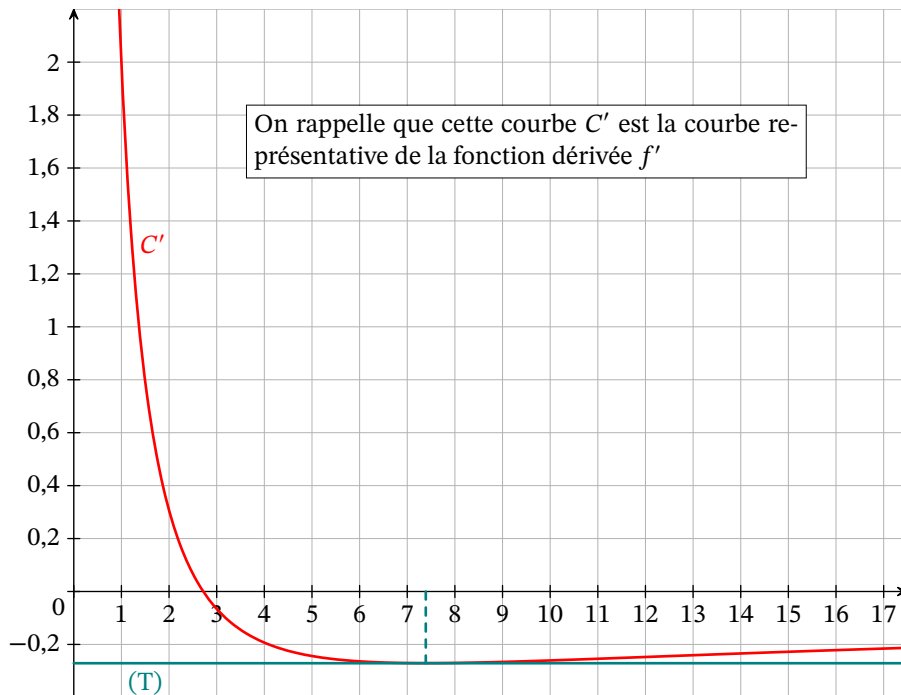
$$f(x) = (2 - \ln(x)) \times \ln(x)$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal et  $C'$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ , fonction dérivée de la fonction  $f$ .

La **courbe**  $C'$  est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale ( $T$ ).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :

a) le coefficient directeur de la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1.

**Correction :**

Le coefficient directeur de la tangente à  $C$  en  $x = 1$  est  $f'(1)$ . Graphiquement, sur la courbe  $C'$ , pour  $x = 1$ , on lit  $f'(1) \approx 2$ .

b) le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.

**Correction :**

$f$  est convexe lorsque  $f''(x) \geq 0$ , c'est-à-dire lorsque  $f'$  est croissante. Graphiquement,  $f'$  est croissante sur  $[0; e^2] \approx [0; 7,4]$ . Donc  $f$  est convexe sur  $[0; e^2]$ .

2. a) Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

**Correction :**

Pour  $x > 0$ ,  $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$ . On pose  $X = \ln x$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow +\infty$ . Alors  $f(x) = -X^2 + 2X = X(-X + 2)$ .  $\lim_{X \rightarrow +\infty} -X^2 + 2X = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

**Correction :**

Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\ln x \rightarrow -\infty$ . On pose  $X = \ln x$ , alors  $X \rightarrow -\infty$ .  $f(x) = -X^2 + 2X = X(-X + 2)$ . Quand  $X \rightarrow -\infty$ ,  $-X^2 \rightarrow -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

Graphiquement, cela signifie que la courbe  $C$  admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

3. Montrer que la courbe  $C$  coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

**Correction :**

$$f(x) = 0 \iff (2 - \ln x) \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 2.$$

$$\ln x = 0 \iff x = 1.$$

$$\ln x = 2 \iff x = e^2.$$

Donc la courbe  $C$  coupe l'axe des abscisses aux points  $A(1; 0)$  et  $B(e^2; 0)$ .

4. a) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{2(1 - \ln(x))}{x}$$

**Correction :**

Pour  $x > 0$ ,  $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x} - 2 \ln x \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2 - 2 \ln x}{x} \\ &= \frac{2(1 - \ln x)}{x} \end{aligned}$$

- b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Correction :**

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $x > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \ln x$ .

$$1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	$-\infty$	1	$-\infty$

$$f(e) = (2 - 1) \times 1 = 1.$$

5. On note  $f''$  la dérivée seconde de  $f$  et on admet que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  :

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x) - 2)}{x^2}$$

Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe  $C$ .

**Correction :**

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $x^2 > 0$ , donc  $f''(x)$  est du signe de  $\ln x - 2$ .

$$f''(x) \geq 0 \iff \ln x - 2 \geq 0 \iff \ln x \geq 2 \iff x \geq e^2.$$

On a donc le tableau de convexité suivant :

$x$	0	$e^2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
Convexité de $f$	<i>concave</i>		<i>convexe</i>

Ainsi,  $f$  est concave sur  $]0; e^2]$  et convexe sur  $[e^2; +\infty[$ .

$f''$  s'annule et change de signe en  $x = e^2$ , donc la courbe  $C$  admet un point d'inflexion en ce point.

$$f(e^2) = (2 - 2) \times 2 = 0, \text{ donc le point d'inflexion a pour coordonnées } I(e^2; 0).$$