

## DS N° 10 : Intégrales (1h30)

**I** On considère  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $[0 ; 1]$  et on note  $f'_n$  sa fonction dérivée.

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que  $u_1 = e - 2$ .

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_{20}$ .

(a) Donner une interprétation graphique de  $u_n$ .

**Correction :**

$f_n$  est une fonction positive sur  $[0; 1]$  (car  $x^n \geq 0$  et  $e^{1-x} > 0$ ). Donc par propriété,  $u_n$  est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_n$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

(b) Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite  $(u_n)$ ?

**Correction :**

Sur le graphique, on observe que lorsque  $n$  augmente, la courbe  $\mathcal{C}_n$  se rapproche de l'axe des abscisses. On peut donc conjecturer que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

2. (a) Justifier que pour tout  $x \in [0 ; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

.

**Correction :**

Pour  $x \in [0; 1]$ , on a  $0 \leq x \leq 1$ . En multipliant par  $x^n \geq 0$ , on obtient :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

**Correction :**

De l'inégalité précédente, on obtient en multipliant par  $e^{1-x} > 0$  :

$$0 \leq x^{n+1}e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}$$

Par intégration sur  $[0; 1]$  avec les bornes dans l'ordre, on a :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$$

soit  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

(c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell \geq 0$ .

**Correction :**

La suite  $(u_n)$  est décroissante d'après la question précédente et minorée par 0. Par théorème, une suite décroissante et minorée converge vers une limite  $\ell \geq 0$ .

3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

**Correction :**

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x} \, dx$ .

Par intégration par parties en posant :

On pose  $v(x) = x^{n+1}$  et  $u'(x) = e^{1-x}$ .

Alors  $v'(x) = (n+1)x^n$  et  $u(x) = -e^{1-x}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= [-e^{1-x}x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}(n+1)x^n \, dx \\ &= [e^{1-x}x^{n+1}]_1^0 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \\ &= -1 + (n+1)u_n \end{aligned}$$

Ainsi  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Correction :**

Soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . On a  $\ell \geq 0$ .

De la relation  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ , on peut écrire pour  $n \geq 1$  :

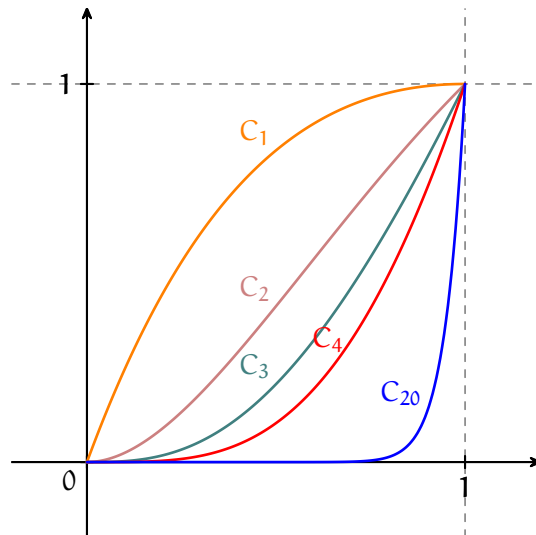
$$u_n = \frac{u_{n+1} + 1}{n+1}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} + 1 = \ell + 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ .

Alors par quotient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} + 1}{n + 1} = 0$ .

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Donc  $l = 0$ .



② On définit les fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x + 1).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère ortho-normé.

1. Pour un nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , on appelle  $M$  le point de coordonnées  $(x ; f(x))$  et  $N$  le point de coordonnées  $(x ; g(x))$  :  $M$  et  $N$  sont donc les points d'abscisse  $x$  appartenant respectivement aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

(a) Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la distance  $MN$  est maximale et donner cette distance maximale.

**Correction :**

Sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $xe^{-x} \geq 0$ , donc  $f(x) \geq g(x)$ .

Alors on a  $MN = f(x) - g(x) = xe^{-x}$ .

On pose  $h(x) = xe^{-x}$  sur  $[0 ; +\infty[$ . Etudions cette fonction.

Pour  $x \geq 0$  :

$$h'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Le signe de  $h'(x)$  est celui de  $(1 - x)$  car  $e^{-x} > 0$ . On déduit donc le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	-
$h$			$e^{-1}$	
	0			0

La distance MN est donc maximale pour  $x = 1$  et vaut  $h(1) = e^{-1}$  u.l..

(b) Placer sur le graphique les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

**Correction :**

Pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = 1 \times e^{-1} + \ln(2) = e^{-1} + \ln 2$  et  $g(1) = \ln 2$ . Les points  $M(1; e^{-1} + \ln 2)$  et  $N(1; \ln 2)$  sont placés sur le graphique (à main levée ou par lecture).

2. Soit  $\lambda$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On note  $D_\lambda$  le domaine du plan délimité par les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

(a) Hachurer le domaine  $D_\lambda$  correspondant à la valeur  $\lambda$  proposée sur le graphique.

**Correction :**

Le domaine  $D_\lambda$  est hachuré sur le graphique fourni. (Question graphique)

(b) On note  $A_\lambda$  l'aire du domaine  $D_\lambda$ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

**Correction :**

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f(x) \geq g(x)$  (car  $xe^{-x} \geq 0$ ). Donc par propriété, l'aire du domaine  $D_\lambda$  délimité par les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$  est :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^\lambda xe^{-x} dx \end{aligned}$$

Par intégration par parties :

On pose  $u'(x) = e^{-x}$  et  $v(x) = x$ , alors  $u(x) = -e^{-x}$  et  $v'(x) = 1$ .

$$\begin{aligned}
A_\lambda &= \int_0^\lambda x e^{-x} dx \\
&= [-x e^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx \\
&= -\lambda e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda \\
&= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \\
&= 1 - (\lambda + 1)e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi  $A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}$ .

(c) Calculer la limite de  $A_\lambda$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat.

**Correction :**

On a :  $\frac{\lambda + 1}{e^\lambda} = \frac{\lambda}{e^\lambda} + \frac{1}{e^\lambda}$ .

On a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0$  par croissance comparée, et par quotient  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$

Donc par somme  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1$ .

L'aire du domaine délimité par les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $[0; +\infty[$  est égale à 1 unité d'aire.

3. On considère l'algorithme suivant :

(a) Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur  $S = 0,8$  ?

**Correction :**

On cherche le plus petit entier  $t$  tel que  $1 - \frac{t+1}{e^t} \geq 0,8$ , soit  $\frac{t+1}{e^t} \leq 0,2$ .

Par tests successifs :

- $t = 0 : \frac{1}{1} = 1 > 0,2$
- $t = 1 : \frac{2}{e} \approx 0,736 > 0,2$
- $t = 2 : \frac{3}{e^2} \approx 0,406 > 0,2$
- $t = 3 : \frac{4}{e^3} \approx 0,199 < 0,2$

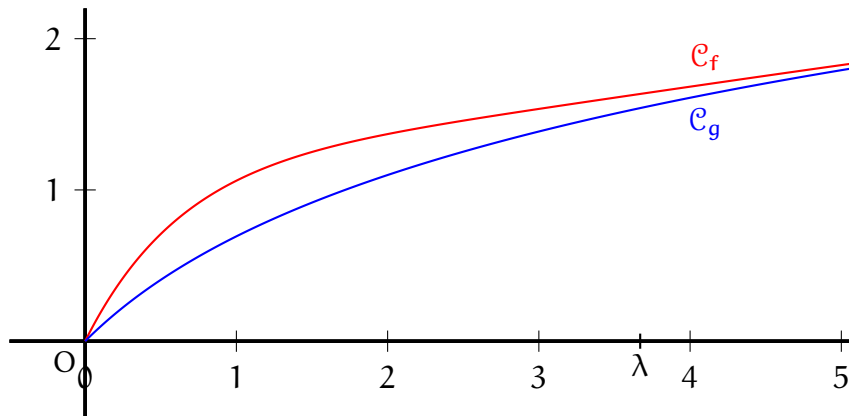
L'algorithme s'arrête donc pour  $t = 3$ .

En fait cet algorithme augmente  $t$  de 1 en 1 tant que  $A(t) < S$ .

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

**Correction :**

Cet algorithme retourne le plus petit entier  $\lambda$  (noté  $t$  dans l'algorithme) tel que  $A_\lambda \geq S$ , c'est-à-dire l'entier à partir duquel l'aire entre les deux courbes entre 0 et  $\lambda$  dépasse le seuil  $S$  donné.



III On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$F(x) = \int_1^x (1 + e^{-t}) \ln t \, dt$$

1. Quel est le signe de  $F(x)$  suivant les valeurs de  $x$  ?

**Correction :**

On note  $h(t) = (1 + e^{-t}) \ln t$  pour  $t > 0$ .

Pour tout  $t > 0$ , on a  $1 + e^{-t} > 0$ .

Le signe de  $h(t)$  est donc celui de  $\ln t$  :

- Si  $t \in ]0; 1]$ , alors  $\ln t < 0$  donc  $h(t) \leq 0$ .
- Si  $t \geq 1$ , alors  $\ln t > 0$  donc  $h(t) \geq 0$ .

Par définition,  $F(x) = \int_1^x h(t) \, dt$ .

- Si  $x \geq 1$ , alors l'intégrale est prise sur  $[1; x]$  avec  $h(t) \geq 0$ , donc  $F(x) \geq 0$ .
- Si  $0 < x < 1$ , alors les bornes ne sont plus dans l'ordre ( $x < 1$ ) et on a donc (en inversant les bornes) :

$$\begin{aligned} F(x) &= - \int_x^1 h(t) \, dt \\ &= \int_x^1 -h(t) \, dt \end{aligned}$$

avec  $-h(t) \geq 0$  sur  $[x; 1]$ , et donc par théorème de positivité  $F(x) \geq 0$  également.

Ainsi,  $F(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ , et  $F(x) = 0$  seulement pour  $x = 1$ .

2. Définir  $F$  comme la primitive d'une certaine fonction  $f$  que vous définirez.

**Correction :**

Par propriété du cours,  $F$  est la primitive de  $f(t) = (1 + e^{-t}) \ln t$  qui s'annule en 1.

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $F'(x) = f(x) = (1 + e^{-x}) \ln x$ .

3. Étudier le sens de variations de la fonction  $F$ .

**Correction :**

On a  $F'(x) = (1 + e^{-x}) \ln x$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a  $1 + e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $F'(x)$  est celui de  $\ln x$ .

On déduit le tableau de variations de  $F$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	+
$F'(x)$		0	+
$F$		0	

On en déduit :

- $F$  est décroissante sur  $]0; 1]$ .
- $F$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .
- $F$  admet un minimum en  $x = 1$  et  $F(1) = 0$ .

4. (a) Démontrer que pour tout réel  $x$  supérieur à 1,

$$F(x) \geq \int_1^x \ln t \, dt$$

**Correction :**

Pour tout  $t \geq 1$ , on a  $e^{-t} \geq 0$ , donc  $1 + e^{-t} \geq 1$ .

De plus,  $\ln t \geq 0$  sur  $[1; x]$ . En multipliant cette inégalité par  $\ln t \geq 0$ , on obtient :

$$(1 + e^{-t}) \ln t \geq \ln t$$

Par intégration de l'inégalité sur  $[1; x]$  (avec  $x \geq 1$ ), on conserve le sens de l'inégalité :

$$\int_1^x (1 + e^{-t}) \ln t \, dt \geq \int_1^x \ln t \, dt$$

soit  $F(x) \geq \int_1^x \ln t \, dt$ .

(b) Déterminer par intégration par parties :  $\int_1^x \ln t \, dt$ .

**Correction :**

Par intégration par parties :

On pose  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = \ln t$ . Alors  $u(t) = t$  et  $v'(t) = \frac{1}{t}$ .

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln t \, dt &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \, dt \\ &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x 1 \, dt \\ &= x \ln x - (x - 1) \\ &= x \ln x - x + 1\end{aligned}$$

(c) En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

**Correction :**

Pour  $x \geq 1$ , on a d'après la question 4.a :

$$F(x) \geq x \ln x - x + 1$$

Et  $x \ln x - x + 1 = x(-1) + 1$ , alors par produit et somme :

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x + 1) = +\infty .$$

Par comparaison, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .