

DS N° 10 : Intégrales (1h30)

I On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ et \mathcal{C}_{20} .
 - (a) Donner une interprétation graphique de u_n .
 - (b) Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) ?
2. (a) Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

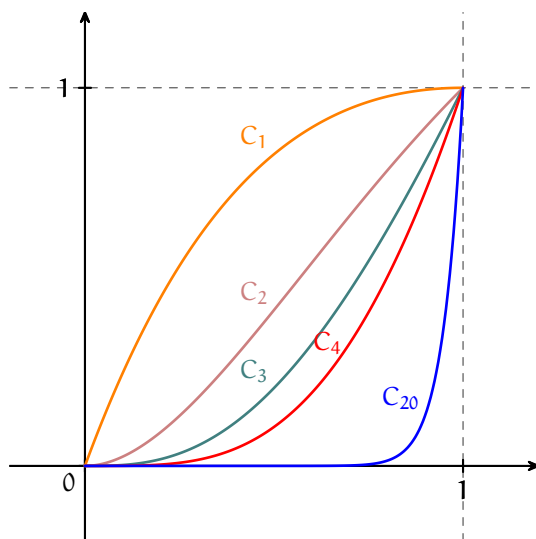
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

(c) Montrer que la suite (u_n) converge vers $\ell \geq 0$.

3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n) .



II On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

- Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
 - Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
 - Placer sur le graphique les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .
- Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
 - Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique.
 - On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda + 1}{e^\lambda}.$$

(c) Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

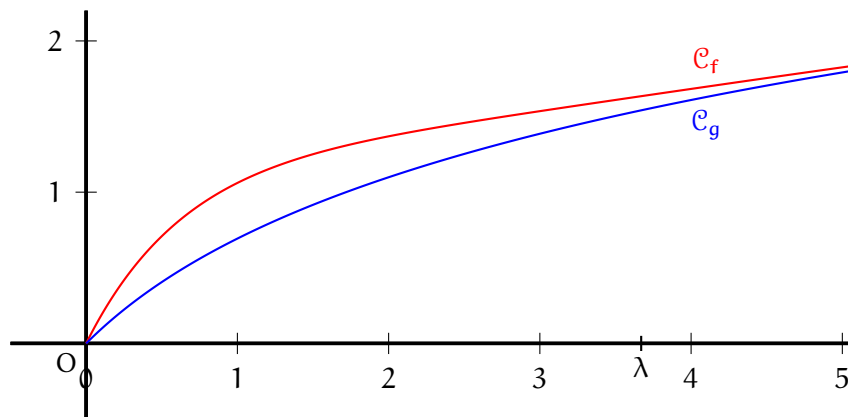
- On considère l'algorithme suivant :

```

1 def mystere(S):
2   t=0
3   while 1-(t+1)/exp(t) < S:
4     t=t+1
5   return(t)

```

- Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?
- Quel est le rôle de cet algorithme ?



- III** On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x (1 + e^{-t}) \ln t \, dt$$

- Quel est le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x ?
- Définir F comme la primitive d'une certaine fonction f que vous définirez.
- Étudier le sens de variations de la fonction F .
- (a) Démontrer que pour tout réel x supérieur à 1,

$$F(x) \geq \int_1^x \ln t \, dt$$

- Déterminer par intégration par parties : $\int_1^x \ln t \, dt$.
- En déduire la limite de F en $+\infty$.