# *DS N° 11 : Intégrales, trigonométrie et dénombrement (1h30)*

**I** **(4 points)** Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.
   Combien de poignées de mains ont été échangées ?
2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.
   Combien y a-t-il de possibilités de distribuer ces prix ?
3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.
   (a) Combien de podiums différents y a-t-il ?
   (b) Combien de podiums différents y a-t-il dont Jacques fait partie ?

**Correction :**

1. Chaque joueur de la première équipe (22 joueurs) serre la main de chaque joueur de la seconde (25 joueurs). Le nombre de poignées de mains est donc :
$$22 \times 25 = 550.$$
2. Les trois premiers reçoivent le même prix, donc l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas répétition. Le nombre de possibilités correspond au nombre de combinaisons de 3 concurrents parmi 18 :
$$\binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 816.$$
3. (a) Un podium est un classement ordonné des trois premiers. Nous avons donc à faire à des 3-listes sans répétition. Le nombre de podiums est donc :
$$7 \times 6 \times 5 = 210.$$
   (b) Si Jacques fait partie du podium, on a 3 possibilités :
   - S'il est premier, il y a $6 \times 5 = 30$ possibilités de placer les deux autres.
   - S'il est deuxième, de la mème manière 30 possibilités.
   - Pareil pour troisième.

   En tout cela fait donc 90 podiums avec Jacques.

**II** **(2 points)** On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}$$

1. Montrer que f est de période $\pi$.
2. Etudier la parité de f.

**Correction :**

En utilisant le fait que cos est $2\pi$-périodique et paire et que sin est $2\pi$-périodique et impaire on a :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \frac{1}{\cos(2(x+\pi)) + \sin^2(x+\pi)} \\ &= \frac{1}{\cos(2x+2\pi) + \sin^2(x+\pi)} \\ &= \frac{1}{\cos(2x) + (-\sin x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} = f(x). \end{aligned}$$

   Ainsi f est $\pi$-périodique.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{\cos(-2x) + \sin^2(-x)} \\ &= \frac{1}{\cos(2x) + (-\sin x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} = f(x). \end{aligned}$$

   Donc f est paire.

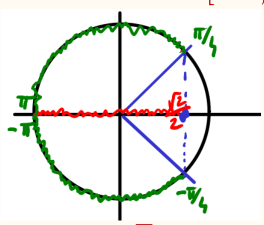
## III (1 points)

Résoudre :

$(E_1)$ : $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.

**Correction :**

On résout dans $[-\pi;\pi]$ avec le cercle trigonométrique :



$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = -\dfrac{\pi}{4}$.
L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{4}; \pi\right].$$

## IV (13 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

**PARTIE A**

1. (a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$,

$$f'(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)].$$

**Correction :**

Pour $x \in [0; \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

(b) Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

**Correction :**

Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $e^x > 0$ et $\sin x + \cos x > 0$ (car $\sin x$ et $\cos x$ sont positifs et non nuls simultanément). Ainsi $f'(x) > 0$ sur cet intervalle, donc $f$ est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. (a) Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0$.

**Correction :**

On a $f(0) = e^0 \sin 0 = 0$ et $f'(0) = e^0(\sin 0 + \cos 0) = 1 \times (0 + 1) = 1$.
Une équation de la tangente $T$ est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

et donc

$$T : y = x$$

(b) Démontrer que la fonction $f$ est convexe sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**Correction :**

On calcule $f''(x)$ pour $x \in [0; \pi]$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= e^x(2\cos x). \end{aligned}$$

Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi $f$ est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) En déduire que pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geqslant x$.

**Correction :**

La fonction f est convexe sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. La tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$. Ainsi, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \geqslant x$, c'est-à-dire $e^x \sin x \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

**Correction :**

On a $f''(x) = 2e^x \cos x$.
Sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) \geqslant 0$, donc f est convexe.
Sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$, donc $f''(x) \leqslant 0$, donc f est concave.

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | |

La dérivée seconde s'annule et change de signe en $x = \dfrac{\pi}{2}$, donc le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion.

**PARTIE B**

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

**Correction :**

**Première façon :**
On pose $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin x$.
Alors $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned}
I &= \left[-e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \\
&= \left(-e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} + e^0 \cos 0\right) + J \\
&= (0 + 1) + J \\
&= 1 + J.
\end{aligned}$$

**Deuxième façon :**
On pose $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = \cos x$, $v(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} I &= [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx \\ &= \left(e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0\right) - J \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - J. \end{aligned}$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

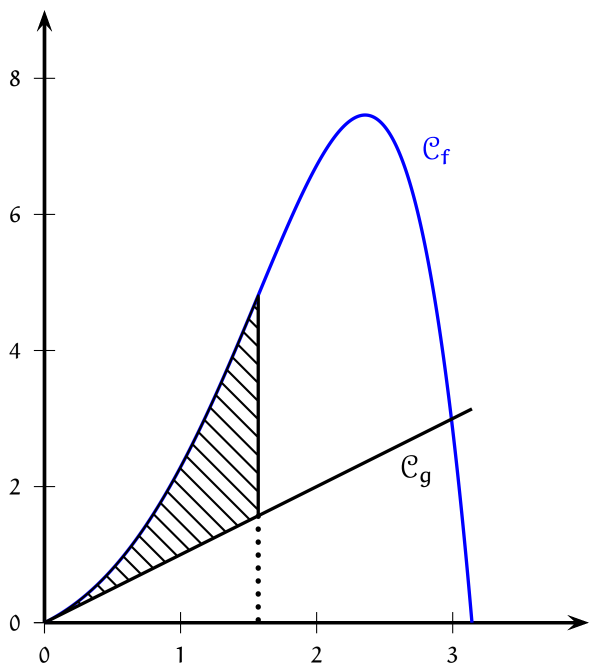
**Correction :**

On a le système :

$$\begin{cases} I = 1 + J \\ I = e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient $2I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$, donc $I = \dfrac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.



**Correction :**

Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'après la question A.2.c, on a $f(x) \geqslant g(x)$. Par propriété, l'aire hachurée est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) - g(x)\right)\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x \sin x - x\right)\ dx \\
&= I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dx \\
&= I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \\
&= \frac{4 + 4e^{\frac{\pi}{2}} - \pi^2}{8} \quad \text{u.a.}
\end{aligned}$$