DS N° 11 : Intégrales, trigonométrie et dénombrement (1h30)

I **(4 points)** Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.
   Combien de poignées de mains ont été échangées ?
2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.
   Combien y a-t-il de possibilités de distribuer ces prix ?
3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.
   (a) Combien de podiums différents y a-t-il ?
   (b) Combien de podiums différents y a-t-il dont Jacques fait partie ?

II **(2 points)** On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}$$

1. Montrer que f est de période π.
2. Etudier la parité de f.

III **(1 points)**
Résoudre :
(E_1) : $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.

IV **(13 points)**
On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$,
   $$f'(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)].$$
   (b) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (b) Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geqslant x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.