

DS N° 14 : Probabilités et inégalités de concentration (1h)

I La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7% des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65% des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98% des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ». Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

Correction :

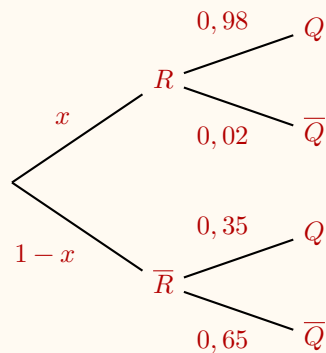
D'après les données de l'énoncé :

$$P(Q) = 0,917 \quad \text{et} \quad P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$$

- (b) On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

Correction :

L'arbre pondéré complété est le suivant :



- (c) Montrer que $x = 0,9$.

Correction :

R, \bar{R} partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(R)P_R(Q) + P(\bar{R})P_{\bar{R}}(Q) \\ &= 0,98x + 0,35(1-x) \\ &= 0,63x + 0,35 \end{aligned}$$

Donc

$$x = \frac{P(Q) - 0,35}{0,63}$$

et $P(Q) = 0,917$, donc $x = \frac{0,567}{0,63} = 0,9$.

- (d) L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

Correction :

On cherche $P_Q(R)$:

$$\begin{aligned}P_Q(R) &= \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \\ &\approx 0,962\end{aligned}$$

La probabilité qu'un étudiant ayant répondu « oui » ait réussi l'examen est environ 0,962.

2. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

Correction :

On cherche la plus grande note k telle que $P(N \geq k) \geq 0,65$ (les 65% des meilleurs ou plus auront une récompense).

En utilisant la calculatrice pour la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,615)$:

- $P(N \geq 11) \approx 0,797$
- $P(N \geq 12) \approx 0,649$
- $P(N \geq 13) \approx 0,471$

En toute rigueur, si la directrice récompense à partir de 11, elle va récompenser 79,7% des élèves.

Il serait plus judicieux de récompenser à partir de 12, en effet dans ce cas, le nombre d'élèves récompensés serait alors de 64,9% (en-dessous de 65 mais presque égal à 65).

3. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires N_1, N_2, \dots, N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux.
On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

Correction :

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,615)$, on a :

$$E(N_i) = np = 20 \times 0,615 = 12,3$$

$$V(N_i) = np(1-p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{10} N_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(N_i) = 10 \times 12,3 = 123$$

Par indépendance des N_i :

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{10} N_i\right) = \sum_{i=1}^{10} V(N_i) = 10 \times 4,7355 = 47,355$$

4. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

(a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

Correction :

M représente la moyenne des notes des dix étudiants interrogés.

(b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

Correction :

Par les propriétés de l'espérance et de la variance, on a :

$$E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10}E(S) = \frac{123}{10} = 12,3$$

$$V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10^2}V(S) = \frac{47,355}{100} = 0,47355$$

(c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Correction :

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M - E(M)| \geq \delta) \leq \frac{V(M)}{\delta^2}$$

Ici $E(M) = 12,3$, $V(M) = 0,47355$, et on prend $\delta = 2$, on a alors :

$$P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4}$$

Ce qui nous donne :

$$P(M \notin]10,3 ; 14,3]) \leq 0,1183875$$

Et donc par passage à l'événement contraire :

$$P(M \in]10,3 ; 14,3]) \geq 1 - 0,1183875 = 0,8816125 \geq 0,80$$

La probabilité que la moyenne soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est donc d'au moins 88%, et en particulier d'au moins 80%.

5. Le BDE (le bureau des élèves) souhaite faire une étude plus poussées auprès des étudiants et a besoin d'un échantillon représentatif de 10 élèves.

Ils en sélectionnent au hasard un échantillon de 10 en faisant attention de ne pas prendre des groupes d'amis mais des personnes indépendantes. Il font la moyenne de ce groupe et obtiennent 15,43. Doivent-ils se fier à ce groupe pour faire leur étude ?

Correction :

La moyenne obtenue est 15,43. D'après la question précédente, la probabilité que la moyenne soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80%. La valeur observée 15,43 est en dehors de cet intervalle. Cela correspond à un événement qui a une probabilité inférieure à 20% de se produire. Il est donc peu probable que cet échantillon soit représentatif de la population des étudiants. Le BDE ne doit pas se fier à ce groupe pour son étude.

II Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons. On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

Correction :

Le nombre de façons de choisir 3 filles parmi 18 est $\binom{18}{3}$. Le nombre de façons de choisir 3 garçons parmi 14 est $\binom{14}{3}$. Par principe multiplicatif, le nombre total d'équipes est :

$$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 816 \times 364 = 297024$$

L'affirmation est donc **vraie**.