DS N° 14 : Probabilités et inégalités de concentration (1h)

I La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

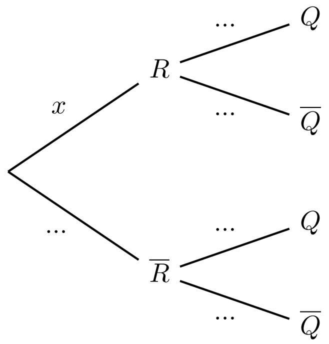
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que $91,7\,\%$ des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- $65\,\%$ des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- $98\,\%$ des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
   (b) On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
   (c) Montrer que $x = 0,9$.
   (d) L'étudiant interrogé a répondu « oui »à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?



2. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que $65\,\%$ des étudiants soient récompensés ?
3. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux.
   On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
4. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,473\,55$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre $10,3$ et $14,3$ est d'au moins $80\,\%$ ».
5. Le BDE (le bureau des élèves) souhaite faire une étude plus poussées auprès des étudiants et a besoin d'un échantillon représentatif de 10 élèves.
   Ils en sélectionnent au hasard un échantillon de 10 en faisant attention de ne pas prendre des groupes d'amis mais des personnes indépendantes. Il font la moyenne de ce groupe et obtiennent 15,43. Doivent-ils se fier à ce groupe pour faire leur étude ?

II *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.*
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons. On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.
   Affirmation : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.