

DS N°2 : Suites (1h15)

I (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}.$$

1. Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Correction :

Pour $x \in [1 ; +\infty[$, on a $3x - 2 > 0$ donc f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}.$$

Comme $\sqrt{3x-2} > 0$ sur $[1 ; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$ sur $[1 ; +\infty[$.

Donc f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On définit pour tout n entier naturel, la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = -6$.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

Correction :

Initialisation ($n = 0$) : On a $u_0 = 6$ et $u_1 = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4$. Donc $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 6$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $2 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 6$ et montrons $2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 6$.
On a :

$$\begin{aligned} & 2 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 6 \\ \text{donc} \quad & f(2) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(6) \quad (\text{car } f \text{ croissante sur } [1 ; +\infty[) \\ \text{donc} \quad & 2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4 \\ \text{donc} \quad & 2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 6 \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

- (b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée ℓ .

Correction :

D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 2.

Donc, par théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 2$.

3. Démontrer que la limite ℓ satisfait l'équation :

$$\ell^2 = 3\ell - 2$$

Correction :

On a pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{3u_n - 2}$.

En élevant au carré : $u_{n+1}^2 = 3u_n - 2$.

Comme (u_n) converge vers ℓ , on déduit par produit des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$.

Et d'autre part, par produit et somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n - 2 = 3\ell - 2$.

Ainsi, on a

$$\ell^2 = 3\ell - 2.$$

4. En déduire la valeur de ℓ .

Correction :

On résout :

$$\begin{aligned}\ell^2 = 3\ell - 2 &\iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \\ &\iff (\ell - 1)(\ell - 2) = 0 \quad (1 \text{ et } 2 \text{ sont racines évidentes}) \\ &\iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2.\end{aligned}$$

Comme $\ell \geq 2$ (car (u_n) est minorée par 2), on a $\ell = 2$.

5. On considère la fonction **rang** écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

```
1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n
```

(a) Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

Correction :

La suite (u_n) converge vers 2 en décroissant. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel $u_n < 2 + \varepsilon$.

Ici, $a = 2.000001 = 2 + 10^{-6}$. Comme (u_n) converge vers 2, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < 2.000001$.

Donc la boucle **while** s'arrête et la fonction renvoie n .

(b) Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Correction :

La fonction `rang(a)` renvoie un résultat la boucle **while** et qu'elle s'arrête.

Pour sortir : Il faut qu'il existe un rang n tel que $u_n < a$.

Comme (u_n) est décroissante et converge vers 2 par valeurs supérieures ou égales à 2, on a $u_n \geq 2$ pour tout n .

Donc :

- Si $a > 2$, alors il existe un rang N tel que $u_N < a$ (car (u_n) converge vers 2). La fonction renvoie une valeur.

- Si $a \leq 2$, alors $u_n \geq 2 \geq a$ pour tout n , donc la boucle ne s'arrête jamais. La fonction ne renvoie pas de résultat (ou boucle indéfiniment).

Conclusion : `rang(a)` renvoie un résultat si et seulement si $a \in]2; +\infty[$.

(II) (4 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n + 3$$

1. Calculer u_1 .

Correction :

$$u_1 = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 0 + 3 = 1 + 0 + 3 = 4.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n + 5$$

Correction :

Initialisation ($n = 0$) : On a $u_0 = 3$ et $0 \leq 3 \leq 5$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $k \leq u_k \leq k + 5$ et montrons $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 6$.

On a :

$$\begin{aligned} & k \leq u_k \leq k + 5 \\ \text{Donc} \quad & \frac{1}{3}k \leq \frac{1}{3}u_k \leq \frac{1}{3}(k + 5) \quad (\text{par produit par } \frac{1}{3} > 0) \\ \text{Donc} \quad & \frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k + 3 \leq \frac{1}{3}u_k + \frac{2}{3}k + 3 \leq \frac{1}{3}(k + 5) + \frac{2}{3}k + 3 \quad (\text{par somme de } \frac{2}{3}k + 3) \\ \text{Donc} \quad & k + 3 \leq u_{k+1} \leq k + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Or $k + 1 \leq k + 3$ et $k + \frac{14}{3} \leq k + 6$.

Donc $k + 1 \leq u_{k+1} \leq k + 6$, ce qui démontre l'hérédité.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n + 5$.

3. En déduire la limite de (u_n) .

Correction :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leq u_n \leq n + 5$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc, par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

Correction :

En reprenant l'inégalité précédente et en divisant par $n > 0$ (pour $n \geq 1$), on a :

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{5}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{n} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

(III) (2 points) Soit (u_n) une suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2$ et $u_0 = -1$.

On admettra (simple démonstration par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq u_n \leq 0$.

1. Etudier les variations de (u_n) .

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{2}u_n^2 - u_n \\ &= -u_n \left(\frac{1}{2}u_n + 1 \right). \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, $-1 \leq u_n \leq 0$, donc :

- $-u_n \geq 0$ (car $u_n \leq 0$)
- $\frac{1}{2}u_n + 1 \geq \frac{1}{2} \times (-1) + 1 = \frac{1}{2} > 0$

Donc par produit, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

2. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) .

Correction :

La suite (u_n) est croissante et majorée par 0 (car $u_n \leq 0$ pour tout n).

Donc, par théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite $\ell \leq 0$.

(IV) (1 point) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse. (Vous justifierez votre réponse).

La suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sin n}{n}$ est divergente.

Correction :

L'affirmation est fausse.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

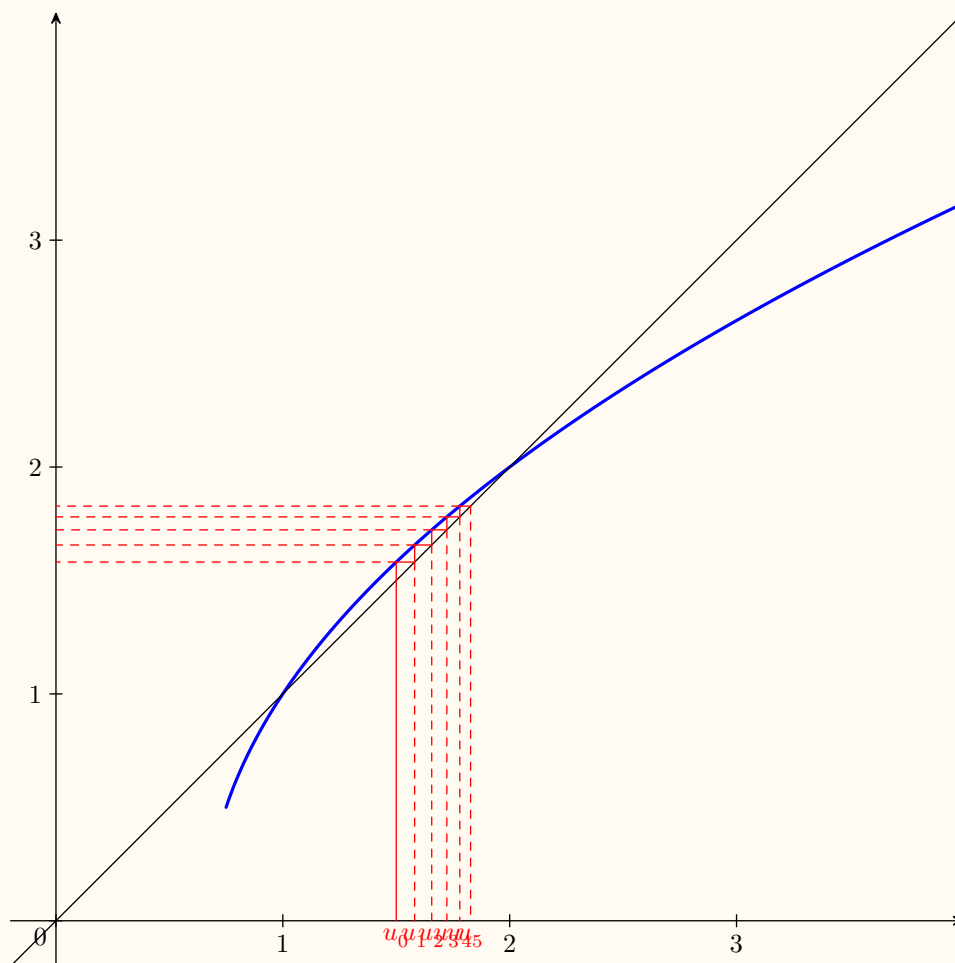
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

La suite (u_n) est donc convergente (vers 0), et non divergente.

(V*) Si dans l'exercice 1, on choisit $u_0 = \frac{3}{2}$, que dire alors sur la suite (u_n) ? Un dessin avec la fonction f serait certainement le bienvenu...

Correction :

Dessin :



On observe la convergence en escalier vers le point fixe 2.

Étude du cas $u_0 = \frac{3}{2}$:

On a $f(x) = \sqrt{3x-2}$ définie sur $[1; +\infty[$.

Comportement :

- Si $u_0 = 2$, la suite est constante égale à 2.
- Si $u_0 > 2$, la suite est décroissante et converge vers 2 (cas de l'exercice 1 avec $u_0 = 8$).
- Si $1 < u_0 < 2$, la suite est croissante et converge vers 2.
- Si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- Si $u_0 < 1$, la suite n'est pas définie car f n'est pas définie pour $x < 1$.

Ici, $u_0 = \frac{3}{2} \in]1; 2[$, donc la suite est croissante et converge vers 2.

Démonstration : Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation ($n = 0$) : ok

Hérédité : Supposons que $u_k \leq u_{k+1} \leq 2$. Comme f est croissante sur $[1; +\infty[$, on a :

$$f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$$

soit

$$u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2.$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers $\ell \leq 2$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = 2$ (car $\ell \geq u_0 > 1$).