

DS N° 2 : Suites (1h15)

I (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}.$$

1. Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On définit pour tout n entier naturel, la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 6$.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée ℓ .

3. Démontrer que la limite ℓ satisfait l'équation :

$$\ell^2 = 3\ell - 2$$

4. En déduire la valeur de ℓ .

5. On considère la fonction **rang** écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

```
1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n
```

- (a) Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

- (b) Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

II (4 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n + 3$$

1. Calculer u_1 .
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n + 5$$

3. En déduire la limite de (u_n) .
4. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

III (2 points) Soit (u_n) une suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2$ et $u_0 = -1$.

On admettra (simple démonstration par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq u_n \leq 0$.

1. Etudier les variations de (u_n) .
2. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) .

IV (1 point) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse. (Vous justifierez votre réponse).

La suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sin n}{n}$ est divergente.

V* Si dans l'exercice 1, on choisit $u_0 = \frac{3}{2}$, que dire alors sur la suite (u_n) ? Un dessin avec la fonction f serait certainement le bienvenu...