

DS N°3 : Mini test sur les limites (30 min)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \frac{-2x-1}{2x^2-5x+2}; \quad \text{en } 2^-$$

$$f_2(x) = \frac{-3x+6}{2x^2-5x+2}; \quad \text{en } 2^-$$

$$f_3(x) = \frac{2x^5+4x^2}{x^3-x^4}; \quad \text{en } -\infty$$

$$f_4(x) = \exp\left(\frac{2}{x-3}\right); \quad \text{en } 3^-$$

$$f_5(x) = e^{-x} - x^4; \quad \text{en } -\infty$$

$$f_6(x) = \frac{e^{\cos x+1}}{x^2}; \quad \text{en } +\infty$$

$$f_7(x) = \frac{e^{x^2}}{x}; \quad \text{en } +\infty$$

Correction :

1. On a $2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)(x-\frac{1}{2})$ donc on a le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

On a $\lim_{x \rightarrow 2} (-2x-1) = -5$, et d'après le tableau de signe : $\lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 - 5x + 2 = 0^-$.

Alors par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x-1}{2x^2-5x+2} = +\infty$$

2. On a $2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)$ donc

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{-3x+6}{2x^2-5x+2} \\ &= \frac{-3(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \\ &= \frac{-3}{(2x-1)} \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_2(x) = \frac{-3}{3} = -1.$$

3. On a pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{2x^5 + 4x^2}{x^3 - x^4} \\ &= \frac{x^5(2 + \frac{4}{x^3})}{x^4(\frac{1}{x} - 1)} \\ &= \frac{x(2 + \frac{4}{x^3})}{\frac{1}{x} - 1}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{4}{x^3}\right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Donc par produit et quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = +\infty$$

.

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	0	$+$

alors $\lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^-$, donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x - 3} = -\infty$.

D'autre part : $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$,

alors par composée (avec $X = \frac{2}{x - 3}$) :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f_4(x) = 0$$

5. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_5(x) = e^{-x} - x^4 = e^{-x} (1 - e^x x^4)$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^4 = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x x^4) = 1$.

De plus par inverse $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Donc par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) = +\infty$$

.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq \cos x + 1 \leq 2$, et puisque exp est croissante on a

$$1 \leq e^{\cos x + 1} \leq e^2$$

En divisant par $x^2 > 0$, il vient :

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{e^{\cos x + 1}}{x^2} \leq \frac{e^2}{x^2}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{x^2} = 0$.

Donc par théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = 0$.

7. On a pour $x \neq 0$:

$$f_7(x) = \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times x.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc par composée

(avec $X = x^2$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$.

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par produit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = +\infty}.$$