DS N°3 : Mini test sur les limites (30 min)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{2x^4+4x^2}{x^3-x^4}$; en $+\infty$

$f_2(x) = \dfrac{-2x-1}{x^2+x-2}$; en -2^+

$f_3(x) = \dfrac{-3x-6}{x^2+x-2}$; en -2^-

$f_4(x) = \exp(-\frac{2}{x-3})$; en 3^+

$f_5(x) = \mathrm{e}^x - x^4$; en $+\infty$

$f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x^2}$; en $+\infty$

$f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$; en $+\infty$

Correction :

1. On a pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{2x^4+4x^2}{x^3-x^4} \\ &= \frac{x^4(2+\frac{4}{x^2})}{x^4(\frac{1}{x}-1)} \\ &= \frac{2+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{4}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -1$.
Donc par quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \frac{2}{-1} = -2$$

.

2. On a $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ donc

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{x\to-2}(-2x-1) = 3$, et d'après le tableau de signe : $\lim\limits_{x\to-2^+} x^2+x-2 = 0^-$.
Alors par quotient :

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{-2x-1}{x^2+x-2} = -\infty$$

.

3.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{-3x-6}{x^2+x-2} \\ &= \frac{-3(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{-3}{x-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to -2^-} f_3(x) = \frac{-3}{-3} = 1$$

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

alors $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3 = 0^+$, donc par produit et quotient : $\lim\limits_{x\to 3^+} -\dfrac{2}{x-3} = -\infty$.
D'autre part : $\lim\limits_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X = 0^+$,
alors par composée (avec $X = -\dfrac{2}{x-3}$) :

$$\lim_{x\to 3^+} f_4(x) = 0$$

5. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_5(x) = \mathrm{e}^x(1 - \frac{x^4}{\mathrm{e}^x})$$

Par inverse de la croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \dfrac{x^4}{\mathrm{e}^x}) = 1$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
Donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = +\infty$$

.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc puisque exp est croissante on a

$$\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{\sin x} \leq \mathrm{e}^1$$

En divisant par $x^2 > 0$, il vient :

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{x^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x^2} \leq \frac{\mathrm{e}}{x^2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} = 0$.
Donc par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = 0$.

7. On a pour $x \neq 0$:

$$f_7(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} \times x.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc par composée (avec $X = x^2$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$.
Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_7(x) = +\infty}.$$