DS N°3 : Mini test sur les limites (30 min)

Ⓘ Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{-2x-1}{2x^2-5x+2}$; en 2^-

$f_2(x) = \dfrac{-3x+6}{2x^2-5x+2}$; en 2^-

$f_3(x) = \dfrac{2x^5+4x^2}{x^3-x^4}$; en $-\infty$

$f_4(x) = \exp(\frac{2}{x-3})$; en 3^-

$f_5(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^4$; en $-\infty$

$f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\cos x+1}}{x^2}$; en $+\infty$

$f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$; en $+\infty$

Correction :

1. On a $2x^2-5x+2 = 2(x-2)(x-\frac{1}{2})$ donc on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{x\to 2}(-2x-1) = -5$, et d'après le tableau de signe : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x^2-5x+2 = 0^-$.
Alors par quotient :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-2x-1}{2x^2-5x+2} = +\infty$$

.

2. On a $2x^2-5x+2 = (x-2)(2x-1)$ donc

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{-3x+6}{2x^2-5x+2} \\ &= \frac{-3(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \\ &= \frac{-3}{(2x-1)} \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x\to 2^-} f_2(x) = \frac{-3}{3} = -1.$$

3. On a pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{2x^5 + 4x^2}{x^3 - x^4} \\ &= \frac{x^5(2 + \frac{4}{x^3})}{x^4(\frac{1}{x} - 1)} \\ &= \frac{x\left(2 + \frac{4}{x^3}\right)}{\frac{1}{x} - 1}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \dfrac{4}{x^3}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Donc par produit et quotient :

$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$$

.

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$	

alors $\lim\limits_{x \to 3^-} x - 3 = 0^-$, donc par quotient : $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x - 3} = -\infty$.

D'autre part : $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$,

alors par composée (avec $X = \dfrac{2}{x - 3}$) :

$$\lim_{x \to 3^-} f_4(x) = +\infty$$

5. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_5(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^4 = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^x x^4\right)$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x x^4 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \mathrm{e}^x x^4\right) = 1$.

De plus par inverse $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

Donc par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} f_5(x) = +\infty$$

.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq \cos x + 1 \leq 2$, et puisque exp est croissante on a

$$1 \leq \mathrm{e}^{\cos x + 1} \leq \mathrm{e}^2$$

En divisant par $x^2 > 0$, il vient :

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{\cos x + 1}}{x^2} \leq \frac{\mathrm{e}^2}{x^2}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^2}{x^2} = 0$.

Donc par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = 0$.

7. On a pour $x \neq 0$:

$$f_7(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} \times x.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc par composée (avec $X = x^2$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$.
Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_7(x) = +\infty}.$$